

氣體遠心分離에 의한 同位元素濃縮法の 基礎理論

(Basic Theory for Isotope Enrichment by Gas Centrifuge)

吳 英 基

韓國에너지研究所

(1981. 7. 1 접수)

1. 머 리 말

기체원심분리에 의한 동위원소분리법은 그 농축효과가 기체확산법이나 화학치환법에서와 같이 두 동위원소의 질량차의 상대비($\Delta M/M$ 혹은 $\Delta M/M^2$)에 의존하지 않고 절대질량차(ΔM)에 비례하므로 重원소의 동위원소농축에 적합하다. 본 방법의 역사는 1934년 Beams¹⁾의 CCl_4 기체를 사용한 $\text{Cl}^{35}/\text{Cl}^{37}$ 분리실험으로 시작되나, 원리의 간단함에 비하여 초고속회전(직경 20cm 원통의 원심분리기에서 30,000 rpm 이상)을 요하는 장치제작의 기술적 難題로 인하여 실용성의 면에서는 度外視되고 있었다. 그러나 2차대전이 끝나면서 독일과 소련에서 이러한 難題를 극복하는 연구가 꾸준히 진행되었고²⁾, 1950년대말, 미국 Virginia 대학에서 독일인 과학자 Zippe는 그가 소련에서 행했던 실험을 再現하였다³⁾. 1960년, 그의 최종보고서가 나오면서 ORNL 및 Virginia 대학을 중심으로 우라늄농축의 실용화를 위한 연구가 착수되었고, 유럽에서도 영국, 네델란드, 서독의 3국합작(URENCO)으로 연구가 진행되었다⁴⁾. 최근문헌^{5,6)}에 의하면 미국은 현재 8.8million swu/y의 commercial plant를 건설중이며 URENCO는 2기의 0.2 million swu/y 전사용 plant를 영국과 네델란드에 각각 1기씩 보유하고 있다. 프랑스는 1960년 이래 독자적 연구에 의하여 우수한 성능의 원심분리기가 제작되었음을 암시하는 정도이고, 이태리는 1969년 이래, 그리고 오스트레일리아는 1965년 이래 연

구중이다. 일본에서도 1970년 부터 매우 활발한 연구가 진행되어, 1995년 까지 5.5million swu/y의 plant 건설을 계획하고 있다. 우리나라가 갖게 될 대부분의 원자로가 3~4%의 농축우라늄을 연료로 사용하는 PWR 형임을 감안하면, 핵연료주기의 농축부문이 현재로서는 不要不急하다 할지라도 향후 필연적으로 우리의 관심과제일 것이라 하겠다.

원심분리기의 중요부분은 수직축을 중심으로 고속회전하는 원통이다. 이 원통 안으로 2종의 동위원소 혼합기체가 주입되면 기체분자의 평균속력보다 더 빠른 원주속력(400m/sec 이상)으로 회전하는 원통벽에 의해 기체 분자속도벡터의 한 성분이 가속되어 혼합기체는 원통과 맞먹는 각속도로 회전한다. 고속회전에 따르는 원심력에 의해 원통 내부에는 급격한 pressure gradient가 형성된다. 그리고 원심력은 질량에 비례하므로 원통의 중심부에는 가벼운 원소, 벽 근방에는 무거운 원소가 상대적으로 많아지는 radial 방향의 동위원소 분리현상이 일어난다. 이러한 radial 방향의 분리현상을 이용하여 더욱 효과적인 분리가 axial 방향으로 일어나도록 하는 것이 원심분리법의 특징이다. 어떤 장치의 기교에 의하여, 원통벽을 따라 축과 평행하게 한 방향으로 움직이는 기체의 흐름과, 보다 원통중심부 가까이에서 이와는 반대방향으로 흐르는 두 counter current flow가 원통兩端部에서 순환되도록 造作할 수 있다면, 두흐름 사이의 radial 방향의 동위원소 농도분포는 계속되는 순환으로 인하여 axial 방향의 동

위원소분리를 초래하며 원통兩端部에서 두 원소의 농도차는 가장 크게 된다. axial 방향의 동위원소 분리효과는 원통높이에 비례하며 radial 방향의 분리효과보다 월등히 높다.

원심분리기의 주요부분을 그림 1에 보인다. 원통은 진공인 casing 안에서 회전하며 上下端部の bearing에 의하여 支持된다. 고정된 회전축의 pipe를 통하여 원통중심부로 기체는 주입되며, 분리된 기체는 축의 兩端部에 고정된 scoop를 통하여 회전에 의한 impact pressure로써 원심분리기를 빠져나간다. 그리고, baffles에 의하여 가려져 있지않은 scoop의 마찰작용 및 원통兩端部間의 온도차를 造作하여 주므로써 counter-current circulation이 유도된다.

원심분리기의 countercurrent flow에 대한 이론적 해석은 유체역학의 면에서 관심의 대상이 되어왔으며, 기체흐름을 剛體회전의 small perturbation으로 가정하여 선형미분방정식을 푸는것이 상용방법이다. Kai⁷⁾, Soubbaramayer⁸⁾들이 시도한 finite difference에 의한 수치해법, 그리고 원통兩端部 및 벽 근방에서의 각각의 boundary layer 해로부터 전체의 해를 유도하는 소위 matched asymptotic expansion 해법^{9,10,11)}이 알려져 있으며, 1960년대초에 Onsager를 중심으로 연구된, 경계조건에 의한 eigenfunction expansion 해법이 최근 부분적으로나마 공개된 바 있다¹²⁾. 원통내 기체의 속도분포는 동위원소의 농도분포를 결정하며, 농도분포로부터 원심분리기의 separative power를 정량적으로 계산하는 Onsager-Cohen 이론^{13,14,15)}이 알려져 있다. 국내에서는 아직 이 분야의 연구가 시도되지 않았으며, 본 해설의 목적하는 바는 최근 공개된 Onsager의 이론을 중심으로 기체원심분리법의 기초이론을 관심있는 연구가들에 소개하고자 하는데 있다. 제 2절에서 동위원소분리이론의 기초개념인 separative power를 정의하고, 제 3절에서 countercurrent flow의 Onsager 해법을 간략히 소개하며, 제 4절에서는 동위원소분리 이론을 소개하고자 한다.

2. Separative Power의 개념

여기에 한 동위원소 분리장치가 있어서 물분율이 각각 N , $1-N$ 인 2종 혼합기체가 단위시간당 G 를 주입된다고 하자. 분리과정을 거친 후, 주입된 혼합기체는 각각 N' , N'' 물분율의 βG 를 농축체 ($N' > N$)와 $(1-\beta)G$ 를 감손체 ($N'' < N$)로 나뉘어져 단위시간동안 분리장치를 떠난다면 ($0 < \beta < 1$), separation factor α 는 식

(1)과 같이 정의된다.

$$\alpha \equiv \left(\frac{N'}{1-N'} \right) / \left(\frac{N}{1-N} \right) \quad (1)$$

그리고

$$N = \beta N' + (1-\beta) N'' \quad (2)$$

임은 당연하다. separation factor는 분리장치의 효율에 대한 척도가 될 수는 있으나 장치의 실제 분리능력은 분리과정의 throughput에도 관계되므로 이 두 factor를 모두 포함하면서 주입되는 혼합기체의 물분율에 무관한 분리능력의 단일척도가 요구된다. 이러한 단일척도를 separative power¹⁶⁾라 부른다.

분리코자하는 동위원소의 물분율에 따라 결정되는 임의의 가치함수(value function) $V(N)$ 를 생각하고, 분리장치로 주입되는 G 를 혼합체의 가치를 $GV(N)$ 그리고 장치를 벗어나는 농축체 및 감손체의 가치를 각각 $\beta GV(N')$, $(1-\beta)GV(N'')$ 이라 하자. 분리과정에 의한 혼합체의 가치변화 δU 는

$$\delta U = \beta GV(N') + (1-\beta)GV(N'') - GV(N) \quad (3)$$

이며, 이러한 가치변화가 위에서 언급한 separative power에 해당하도록 가치함수 $V(N)$ 를 정의한다. $\epsilon \equiv (\alpha - 1) \ll 1$ 일 때 $V(N')$ 및 $V(N'')$ 을 N 근방에서 Talyer 급수로 전개하여 3차 이하의 항을 무시하면 식 (3)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \delta U = & V(N) [\beta G + (1-\beta)G - G] \\ & + \frac{dV(N)}{dN} [\beta G(N' - N) + (1-\beta)G(N'' - N)] \\ & + \frac{d^2V(N)}{dN^2} \left[\beta G \frac{(N' - N)^2}{2} + (1-\beta)G \frac{(N'' - N)^2}{2} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

식 (1)과 (2)를 이용하면

$$\delta U = \frac{\beta}{1-\beta} \frac{G\epsilon^2}{2} \frac{d^2V(N)}{dN^2} [N(1-N)]^2 \quad (5)$$

δU 는 주입되는 혼합체의 물분율에 무관하도록 $V(N)$ 을 정의하였으므로

$$\frac{d^2V(N)}{dN^2} = \frac{1}{[N(1-N)]^2} \quad (6)$$

$$V(N) = (2N-1) \ln \frac{N}{1-N} \quad (7)$$

우라늄농축에서 G 는 상용 UF_6 의 무게가 아닌 우라늄 원소만의 무게로 표시되며 kg/year나 tons/year의 단위를 사용한다. 그리고 δU 는 G 의 단위에 따라 kg separative work unit per year (kg swu/y) 혹은 swu/y)나 tons separative work unit per year (t swu/y)로 나타낸다.

3. Countercurrent Flow의 Onsager 해법

회전원통축의 下端部에 원점을 둔 (r, θ, z) 의 원통좌표계에서 (u, v, w) 를 속도벡터의 (r, θ, z) 성분이라 하고 다음과 같은 조건에서의 기체흐름을 생각하자.

조건 : 1. steady state

2. azimuthal symmetry

3. gravity forces are neglected

4. viscosity and thermal conductivity are constants

5. ideal gas

(3-1) 等溫剛體회전의 경우

회전원통의 각속도를 Ω 라 하고 원통내부의 기체와 원통과 함께 회전하는 剛體로 보면 (r, θ, z) 에서의 속도성분은

$$(u, v, w) = (0, \Omega r, 0)$$

이며 압력분포는

$$\frac{dp}{dr} = \rho r \Omega^2$$

에서 구해진다. 여기서 p 는 압력, ρ 는 밀도이다. 기체가 T_0 균일온도의 이상기체일때 압력 및 밀도분포는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p_0 &= p_w \exp \left\{ -A^2 \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \right\} \\ \bar{\rho}_0 &= \rho_w \exp \left\{ -A^2 \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 a 는 원통의 반경, $A^2 = Ma^2 \Omega^2 / (2RT_0)$, M 은 기체의 분자량, R 은 기체상수, p_w 및 ρ_w 는 각각 원통벽에서의 압력 및 밀도이다.

(3-2) 선형미분방정식

countercurrent flow가 等溫剛體회전의 small perturbation이라 가정하여 다음과 같은 perturbation variables을 도입한다.

$$\begin{aligned} (u, v, w) &= (0, \Omega r, 0) + (U', V', W') \\ p &= p_0 + p', \quad \rho = \bar{\rho}_0 + \rho', \quad T = T_0 + T' \end{aligned}$$

연속유체역학의 mass, momentum, energy 보존방정식¹⁷⁾ 및 상태방정식들은 이상의 perturbation variables의 일차항만을 취함으로써 다음과 같이 선형화된다.

$$\frac{1}{r} (r \bar{\rho}_0 U')_r + \bar{\rho}_0 W'_{zz} = 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} -2\Omega \bar{\rho}_0 V' - r \Omega^2 \rho' &= -p', \\ + \frac{4\mu}{3} \left[\frac{1}{r} (r U')_r - \frac{U'}{r^2} \right] \\ + \mu U'_{zz} + \frac{\mu}{3} W'_{zz} \end{aligned} \quad (10)$$

$$2\Omega \bar{\rho}_0 U' = \mu \left[\frac{1}{r} (r V')_r + V'_{zz} - \frac{V'}{r^2} \right] \quad (11)$$

$$\begin{aligned} 0 &= -P'_{zz} + \frac{\mu}{r} (r W')_r + \frac{4\mu}{3} W'_{zz} \\ &+ \frac{\mu}{3r} (r U')_{zz} \end{aligned} \quad (12)$$

$$0 = r \Omega^2 \bar{\rho}_0 U' + \kappa \left[\frac{1}{r} (r T')_r + T'_{zz} \right] \quad (13)$$

$$p' = \frac{1}{M} (\bar{\rho}_0 R T' + \rho' R T_0) \quad (14)$$

여기서 subscripts r, z 들은, partial derivatives를 뜻하며, μ, κ 는 각각 viscosity, thermal conductivity이다. 편의상 다음과 같은 dimensionless variables을 도입하여 式 (9)~(14)를 고쳐쓰면

$$\eta = r/a, \quad y = z/a, \quad R_* = \rho_w \Omega a^2 / \mu$$

$$U = U' / (\Omega a), \quad W = W' / (\Omega a), \quad \omega = V' / (\Omega r)$$

$$\rho_0 = \bar{\rho}_0 / \rho_w, \quad \rho = \rho' / \rho_w, \quad p = p' / p_w$$

$$\theta = T' / T_0$$

다음과 같다.

$$(\eta \rho_0 U)_\eta + \eta \rho_0 W_y = 0 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} -2\eta \rho_0 \omega - \eta \rho &= -\frac{1}{2A_*^2} p_\eta \\ + \frac{1}{R_*} \left[\Delta U - \frac{U}{\eta^2} - \frac{2A_*^2}{3} (\eta U)_\eta \right] \end{aligned} \quad (16)$$

$$2\rho_0 U = -\frac{1}{R_*} \left[\Delta (\eta \omega) - \frac{\omega}{\eta} \right] \quad (17)$$

$$p_y = \frac{2A_*^2}{R_*} \left[\Delta W - \frac{2A_*^2}{3} \eta U_y \right] \quad (18)$$

$$0 = 4R_* (S-1) (\eta \rho_0 U) + \Delta \theta \quad (19)$$

$$p = \rho + \rho_0 \theta \quad (20)$$

$$\text{여기서 } S = 1 + \frac{\gamma-1}{2\gamma} P, A_*^2, P_r = \frac{C_p \mu}{\kappa}, \quad r = \frac{C_p}{C_v}, \quad C_p \text{는}$$

등압비열, C_v 는 등적비열, 그리고 Δ 은 dimensionless 좌표계에서의 Laplace operator이다.

式(18)과 (20)을 이용하여 式(16)의 p, ρ 를 소개하면

$$\begin{aligned} \eta \rho_0 (\theta - 2\omega)_y &= \frac{1}{R_*} \left[\Delta - \frac{1}{\eta^2} - \frac{4}{3} A_*^2 \eta^2 \right] U_y \\ - \frac{1}{R_*} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} - 2A_*^2 \eta \right] \Delta W \end{aligned} \quad (21)$$

결국 기체흐름을 묘사하는 미분방정식은 式(15), (17), (19), (21)이며 이들의 해를 얻기위한 근사의 형태에 따라 해법이 달라진다.

(3-3) Onsager의 근사에 의한 미분방정식

원통안의 기체는 고속회전에 의한 원심력으로 인하여 대부분 원통벽에 밀집되어 있으며, 원통 兩端部 극한영역을 제외한 모든 영역에서 momentum, heat의 axial transport가 무시된다.

代數的으로 표시되는 η 값을 $\eta=1$ 로 근사하여 式 (17), (19)를 변형하면

$$A(\theta-2\omega)=-4R_e S \rho_0 U \quad (22)$$

$$A[\theta+2(S-1)\omega]=0 \quad (23)$$

새로운 radial variable $x \equiv A^2(1-\eta^2)$ 을 정의하고 $\phi = \theta - 2\omega$, $h = \theta - 2(S-1)\omega$ 을 도입하여 式(15), (21), (22), (23)을 다시 쓰면

$$e^{-x}W_y = 2A^2(e^{-x}U)_x \quad (24)$$

$$\phi_y = \frac{8A^6}{R_e}(e^x W_{xx})_x \quad (25)$$

$$\phi_{xx} = -\frac{R_e S}{A^4}e^{-x}U \quad (26)$$

$$4A^4 h_{xx} + h_{yy} = 0 \quad (27)$$

式 (25), (26)을 얻는 과정에서 momentum, heat의 axial diffusion을 무시한 점에 주목해야 할 것이며 式 (27)은 원통내의 온도분포를 기술한다. 式(24), (25), (26)은 원통내에서 mass, momentum의 source 및 sink가 없을때의 기체속도분포를 묘사하며, 이들은 적절한 stream function을 정의하므로써 단일 미분방정식의 꼴로 쓰여진다. stream function ϕ 를 다음과 같이 정의하여

$$e^{-x}U = -\phi_y$$

$$e^{-x}W = -2A^2\phi_x$$

式(25), (26)에 대입하면

$$\phi_{xx} = \frac{R_e S}{A^4}\phi_y \quad (28)$$

$$\phi_y = -\frac{16A^8}{R_e}[e^x(e^x\phi_x)_{xx}]_x \quad (29)$$

式(28)와 (29)에서 ϕ 를 소거하면

$$[e^x(e^x\phi_x)_{xx}]_{xx} + \frac{R_e^2 S}{16A^2}\phi_{yy} = 0 \quad (30)$$

potential function χ 를 다음과 같이 정의하여

$$\phi = -2A^2\chi_x$$

式(30)을 다시 쓰면

$$[e^x(e^x\chi_{xx})_{xx}]_{xx} + B^2\chi_{yy} = 0 \quad (31)$$

여기서 $B = \frac{R_e S^{\frac{1}{2}}}{4A^6}$

式(31)은 6차 선형 homogeneous 미분방정식이지만 Onsager 미분방정식의 일반형은 source 및 sink term에 의한 inhomogeneous 형이다.

(3-4) Eigenfunction Expansion에 의한 Onsager 미분방정식의 해법

式(31)의 해가 다음과 같이 변수 분리된다고 가정하면

$$\chi(x, y) = f(x)g(y)$$

式(31)은 두 미분방정식으로 분해된다.

$$[e^x(e^x f_{xx})_{xx}]_{xx} + \lambda^2 f = 0 \quad (32)$$

$$B^2 g_{yy} - \lambda^2 g = 0 \quad (33)$$

여기서 λ^2 는 상수이다. 일반적으로 λ 가 real, maginary, zero에 따라 세가지의 서로 다른 해가 존재하나 원통벽의 온도 gradient가 linear 혹은 quadratic으로 근사되는 경계조건에서 λ 는 imaginary가 되지 않는다¹²⁾.

원통벽에서의 속도성분이 zero인 경계조건으로 부터

$$\chi_x(0, y) = \chi_{xx}(0, y) = 0 \quad (34)$$

그리고, 式(29)를 이용하면 원통벽의 온도 gradient에 의한 경계조건을 얻는다.

$$L_5 \chi(0, y) = \frac{R_e}{32A^{10}}\phi_y(y) \quad (35)$$

여기서 $L_5 \chi \equiv [e^x(e^x \chi_{xx})_{xx}]_x$, $\phi_y(y)$ 는 원통벽에서의 온도 gradient(prescribed function)이다. 또한 원통중심부 영역 ($x \rightarrow \infty$)에서의 경계조건으로서 $U = W_x = \phi_x = 0$ 를 취하여 potential function으로 표시하면

$$\chi_y(\infty, y) = \chi_x(\infty, y) = L_3 \chi(\infty, y) = 0 \quad (36)$$

여기서 $L_3 \chi \equiv [e^x \chi_{xx}]_x$ 이다.

이상의 경계조건을 이용하면 $\lambda=0$ 인 경우의 해는 다음과 같은 간단한 형태를 갖는다.

$$\chi_0(x, y) = (C_1 + C_2 y)(-2e^{-x} + \frac{2}{3}e^{-2x} + xe^{-2x}) \quad (37)$$

여기서 C_1, C_2 는 원통벽의 온도 gradient로부터 결정되는 상수이다.

$\lambda = \text{real}(\neq 0)$ 일때의 해를 χ_E 라 하면, 찾고자 하는 式(31)의 해는 $\chi = \chi_0 + \chi_E$ 이며, 式(35)의 경계조건으로부터

$$L_5 \chi_E(0, y) = 0 \quad (38)$$

임은 당연하다. $\alpha \equiv \lambda/B$ 를 도입하면 式(33)과 그의 해는 다음과 같다.

$$g_{yy} - \alpha^2 g = 0 \quad (39)$$

$$g = Ee^{-\alpha y} + Fe^{+\alpha y} \quad (40)$$

또한 式(32)는

$$[e^x(e^x f_{xx})_{xx}]_{xx} + B^2 \alpha^2 f = 0 \quad (41)$$

이며, 式(34), (36), (38)의 경계조건에 의하여

$$f_x(0) = f_{xx}(0) = L_5 f(0) = 0 \quad (42)$$

$$f(\infty) = f_x(\infty) = L_3 f(\infty) = 0 \quad (43)$$

$t \equiv x - \ln(\alpha B)$ 를 도입하여 式(41)에 대입하면

$$[e^t(e^t f_{tt})_{tt}]_{tt} + f = 0 \quad (44)$$

6차 선형 미분방정식 式(44)는 일반적으로 여섯개의 해가 존재하나 Onsager에 의하면¹²⁾ 그중 셋만이 $x \rightarrow \infty$ 에서의 경계조건을 만족한다. 이들을 각각 $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ 라 한다면, linear combination으로서의

$$f(t) = A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t) + A_3 f_3(t)$$

을 일반해로 갖는다. 그리고 경계조건 式(42)에 의하여 다음과 같은 homogeneous 연립방정식을 얻으며

$$\begin{bmatrix} f_{1t} & f_{2t} & f_{3t} \\ f_{1tt} & f_{2tt} & f_{3tt} \\ L_5 f_1 & L_5 f_2 & L_5 f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = 0 \text{ at } t = -\ln(\alpha B)$$

이것은 t 가 불연속 eigenvalue를 가짐을 뜻한다. t_n, f_n 을 eigenvalue-eigenfunction의 쌍이라 하면 $\alpha = \exp(-t_n/B)$ 이므로, 式(40)으로부터 $\chi_E(x, y)$ 가 다음과 같은 형태의 해임을 알 수 있다.

$$\chi_E(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [E_n f_n(x) \exp(-\alpha_n y) + F_n f_n(x) \exp(+\alpha_n y)] \quad (45)$$

원통兩端部 영역에서의 경계조건은 상수 E_n, F_n 을 결정하는데 이용된다.

4. Countercurrent Flow에서의 동위원소분리 이론

원심분리기 counter-current에 대한 기체 동역학 이론과 동위원소분리 이론은 사실은 별개의 이론이다. 역사적으로는 後者의 이론이 먼저 연구되었고, 1951년에 이미 Cohen의 이론이 알려져 있었다¹⁶⁾. 본 절에서는 Onsager-Cohen 근사^{13, 14, 15)}에 의하여 동위원소 농도분포에 대한 미분방정식이 도출되는 과정과 원심분리기의 separative power를 계산하는 방법에 관하여 간략히 소개하고자 한다.

(4-1) Onsager-Cohen Gradient Equation

2종 동위원소 혼합기체의 molar density를 C , 분자량을 각각 M_1, M_2 , 분리코자하는 동위원소 "1"의 물분율을 N 이라하자. Countercurrent가 없으면 radial 방향의 동위원소 농도분포는 원심력과 확산력의 평형점에서의 분포이며 axial 방향으로는 균일할것이다. 그러나 속도분포 $u(r, z), w(r, z)$ 에서의 radial flux J^r 및 axial flux J^z 는 다음과 같이 주어진다.

$$J^r = -CD \left[\frac{4M\Omega^2 r}{RT} N(1-N) + \frac{\partial N}{\partial r} \right] + CuN$$

$$J^z = -CD \frac{\partial N}{\partial z} + CwN$$

여기서 Ω 는 원통의 각속도, D 는 확산계수, $4M = M_2 - M_1$ 이다. 정상상태에서 혼합기체의 연속방정식은 다음과 같이 쓰여지며

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rCu) + \frac{\partial}{\partial z} (Cw) = 0 \quad (46)$$

분리코자 하는 동위원소 성분에 대한 정상상태의 연속방정식은 다음과 같다.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rJ^r) + \frac{\partial}{\partial z} (J^z) = 0 \quad (47)$$

式(46), (47)을 적분하면

$$rCu = - \int_0^r r' \frac{\partial}{\partial z} (Cw) dr' \quad (48)$$

$$rJ^r = - \int_0^r r' \frac{\partial}{\partial z} (J^z) dr' \quad (49)$$

J^r, J^z 의 표현식을 式(49)에 대입하고 式(48)을 이용하여 u 를 소거하면, 분리코자 하는 동위원소의 radial 방향에 대한 농도 gradient equation이 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial r} &= \frac{1}{rCD} \int_0^r r' \frac{\partial}{\partial z} \left(CwN - CD \frac{\partial N}{\partial z} \right) dr' \\ &\quad - \frac{N}{rCD} \int_0^r r' \frac{\partial}{\partial z} (Cw) dr' \\ &\quad - \frac{4M\Omega^2}{RT} rN(1-N) \end{aligned} \quad (50)$$

반경 r 인 원통의 수평단면에서의 혼합기체의 net axial flux를 나타내는 함수 $G(r, z)$ 를 다음과 같이 정의하면

$$G(r, z) \equiv \int_0^r 2\pi r' Cw dr'$$

반경 a 인 원심분리기에서의 분리코자 하는 동위원소의 net axial flux $T(z)$ 는

$$\begin{aligned} T(z) &= \int_0^a 2\pi r CwN dr - \int_0^a 2\pi r CD \frac{\partial N}{\partial z} dr \\ &= \int_0^a \frac{\partial G}{\partial r} N dr - \int_0^a 2\pi r CD \frac{\partial N}{\partial z} dr \end{aligned} \quad (51)$$

이며, 혼합기체 전체의 net axial flux $\tau(z)$ 는

$$\tau(z) = G(a, z)$$

임은 당연하다. 式(51)의 우변을 부분적분하므로써

$$\begin{aligned} T(z) &= \tau(z)N(a, z) - \int_0^a G \frac{\partial N}{\partial r} dr \\ &\quad - \int_0^a 2\pi r CD \frac{\partial N}{\partial z} dr \end{aligned} \quad (52)$$

을 얻으며, 式(50)을 式(52)에 대입하면 분리코자 하는 동위원소 농도의 axial gradient equation을 얻는다.

$$\begin{aligned} T(z) &= \tau(z)N(a, z) + \int_0^a G \frac{4M\Omega^2}{RT} rN(1-N) dr \\ &\quad + \int_0^a \frac{GN}{rCD} dr \int_0^r r' \frac{\partial}{\partial z} (Cw) dr' \\ &\quad - \int_0^a \frac{G}{rCD} dr \int_0^r r' \frac{\partial}{\partial z} (CwN) dr' \\ &\quad + \int_0^a \frac{G}{rCD} dr \int_0^r r' \frac{\partial}{\partial z} \left(CD \frac{\partial N}{\partial z} \right) dr' \\ &\quad - \int_0^a 2\pi r CD \frac{\partial N}{\partial z} dr \end{aligned} \quad (53)$$

균일온도에서 $D \propto \frac{1}{C}$ 이므로 CD 가 radial variable r 에 무관하다고 가정하여 다음과 같은 Onsager-Cohen

의 근사를 도입한다.

1. radial 방향에 대한 동위원소 분리효과는 axial 방향에 비하여 무시되어 N , $\frac{\partial N}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}$ 들은 r 에 대해 상수이다.

2. 분리코자 하는 동위원소의 axial diffusion은 무시되어 $\frac{d^2 N}{dz^2} \approx 0$ 이다.

이와같은 근사는 식(53)으로부터 다음과 같은 Onsager-Cohen gradient equation을 도출한다.

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dz} \left[\frac{1}{2\pi CD} \int_0^a \frac{G^2}{r} dr + \pi a^2 CD \right] \\ = \frac{4M\Omega^2}{RT} N(1-N) \int_0^a G r dr - T + \tau N \end{aligned} \quad (54)$$

식(54)는 상용 다음과 같이 정의되는 원심분리 parameter로써 식(55)으로 표시된다.

$$\begin{aligned} L &\equiv \int_0^a 2\pi r |Cw| dr \\ LS_c &\equiv \frac{D}{2\pi c} \int_0^a \frac{G^2}{Lr} dr \\ \frac{S_d}{L} &\equiv \frac{\pi a^2 CD}{L} \\ \varphi &\equiv \frac{4M\Omega^2}{RT} \int_0^a \frac{G}{L} r dr \\ L_0 &\equiv (S_d/S_c)^{\frac{1}{2}} \\ S_0 &\equiv 2(S_c S_d)^{\frac{1}{2}} \\ m &\equiv L/L_0 \\ \frac{dN}{dz} \frac{m^2+1}{2m} S_0 &= \varphi N(1-N) - \frac{T-\tau N}{mL_0} \end{aligned} \quad (55)$$

(4-2) 원심분리기의 separative power

원통내의 기체속도분포 및 동위원소농도의 axial gradient equation을 이용하여 원심분리기의 separative power를 계산하는 것이 다음 단계이다. 혼합기체의 net axial flux $\tau(z)$ 와 분리코자 하는 동위원소의 net axial flux $T(z)$ 에 의한 $z, z+dz$ incremental length에서의 separative power $\Delta(\delta U)$ 는 다음과 같이 주어진다¹⁶⁾.

$$\Delta(\delta U) = (T - N\tau) \Delta N \frac{d^2 V(N)}{dN^2} \quad (56)$$

여기서 $\Delta N = N(z+dz) - N(z)$, $V(N)$ 은 2절에서 소개한 가치함수이다. 식(6)을 이용하여 식(56)을 고쳐쓰면

$$\frac{d(\delta U)}{dz} = \frac{T - N\tau}{N^2(1-N)^2} \frac{dN}{dz}$$

이며, Onsager-Cohen의 gradient equation을 이용하면

$$\begin{aligned} \frac{d(\delta U)}{dz} &= \frac{1}{N^2(1-N)^2} \left[mL_0 \varphi N(1-N) \right. \\ &\quad \left. - \frac{m^2+1}{2} L_0 S_0 \frac{dN}{dz} \right] \frac{dN}{dz} \end{aligned} \quad (57)$$

식(57)의 우변은

$$\frac{dN}{dz} = \frac{m\varphi N(1-N)}{(m^2+1)S_0} \quad (58)$$

일때 최대이며 최대값은

$$\left. \frac{d(\delta U)}{dz} \right|_{\max} = \frac{m^2}{m^2+1} \frac{\varphi^2}{4S_c}$$

$m \gg 1$, $Cw = \text{constant}$ 인 이상적 model flow에 대한 최대 separative power는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} G &= \int_0^r 2\pi r' Cw dr' = \pi r^2 Cw \\ \varphi &= \frac{4M\Omega^2}{RT} \int_0^a \frac{Gr}{L} dr = \frac{4M\Omega^2 \pi Cw a^4}{4RTL} \\ S_c &= \frac{1}{2\pi CD} \int_0^a \frac{G^2}{L^2 r} dr = \frac{\pi Cw^2 a^4}{8DL^2} \\ \delta U_{(\text{ideal max})} &= \int_0^z dz \frac{\varphi^2}{4S_c} \\ &= \frac{\pi CDZ}{2} \left(\frac{4M\Omega^2 a^2}{2RT} \right)^2 \end{aligned}$$

여기서 Z 는 원통높이이다.

원심분리기의 separative power는 상용 다음과 같은 efficiency parameter로써 표시된다.

e_I : ideal efficiency representing the departure from ideality condition [식(57)],

e_c : circulation efficiency equal to $\frac{m^2}{1+m^2}$ averaged over the length of centrifuge,

e_F : flow profile efficiency equal to

$$\int_0^z \frac{\varphi^2}{4S_c} dz / \delta U_{(\text{ideal max})}$$

즉, $\delta U = \int_0^z \frac{d(\delta U)}{dz} dz$

$$= e_I e_c e_F \delta U_{(\text{ideal max})}$$

countercurrent circulation에 의한 원심분리기에서 $e_I \approx 0.815$ 이며¹⁸⁾, 기체의 속도분포로부터 e_c , e_F 를 계산하여 δU 를 얻는다. 그리고 식(3)에 의한 δU 의 실험치와 비교함으로써 이론의 타당성이 검토된다.

5. 맺 음 말

결국 원심분리기의 separative power를 예측하기 위해서는 countercurrent flow에 의한 속도분포가 정량적으로 기술되어야 하며, 그 driving mechanism을 이해하는 것이 중요하다. 원통 兩端部의 온도차, 원통벽의 온도 gradient, feed 및 withdrawl, 그리고 기체회전을 방해하는 scoop의 마찰작용 등은 모두 countercurrent를 일으키는 원인이 된다. 즉, 원통내의 countercurrent는 熱的 혹은 기계적 장치의 기교에 의하여 조작되며 적절한 원심분리기의 설계 및 operation mode로써 조절가능하다. 원심분리이론의 응용은 원통

내의 동위원소분포를 정량적으로 계산하며 optimum separative power의 원심분리기 설계를 가능하게 할 것이다. 현재까지 알려진 이론은 모두 선형화된 countercurrent flow를 가정하고 있으며, 비선형 유체역학적 해석에 관한 연구는 soubbaramayer의 단편적 소개¹⁹⁾ 외에는 공개되지 않고 있다. 그리고, Onsager-Cohen의 동위원소분리 이론을 개량하는 시도가 최근 발표된 바 있다²⁰⁾.

감 사 의 말 씀

본 해설의 작성을 위한 문헌수집에 협조해 주신 鄭 汝奎박사와 姜熙東박사께 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. J. W. Beams, *Rev Mod. Phys.*, **10**, 245 (1938).
2. W. E. Groth, K. Beyerle, E. Nann and K. H. Welge, Proceeding of the 2nd United Nations Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva, September, 1958, Vol.4, pp. 439-446.
3. G. Zippe, "The Development of Short Bowl Centrifuge," ORO-315, 1960.
4. D. R. Olander, *Scientific American*, **239**, 27 (1978).
5. Wm. J. Wilcox, "Uranium Enrichment, a Review of the Present World Status; Capacity, Technology and Plans," K/TD-39, 1979.
6. INFCE WG 2 Report on "Enrichment Availability," IAEA, Vienna, 1980.
7. T. Kai, *J. Nucl. Sci. Tech.*, **14**, 267 (1977).
8. J. P. Lahargue and Soubbaramayer, *Comput. Method Appl. Mech. Eng.*, **15**, 259 (1978).
9. F. H. Bark and T. H. Bark, *J. Fluid Mech.*, **78**, 749 (1976).
10. J. J. H. Brouwer, *J. Eng. Math.*, **12**, 265 (1978).
11. T. Matsuda and K. Hashimoto, *J. Fluid Mech.*, **78**, 337 (1976).
12. H. G. Wood and J. B. Morton, *J. Fluid Mech.*, **101**, 1 (1980).
13. E. Von Halle, "The Countercurrent Gas Centrifuge for the Enrichment of U-235," K/OA-4068, 1977.
14. R. A. Lowry, E. Von Halle and H. G. Wood, "The Modern Gas Centrifuge and Rarefied-Gas Dynamics" K/OA-4722, 1981.
15. E. Von Halle, "The Optimum Axial Flow Tapers in a Countercurrent Gas Centrifuge," K/OA-4445, 1979.
16. K. P. Cohen, "The Theory of Isotope Separation as Applied to the Large Scale Production of U-235," McGraw-Hill Book Co., New York, 1951.
17. R. B. Bird, W. E. Stewart and E. N. Lightfoot, "Transport Phenomena," Wiley, New York, 1960.
18. D. G. Avery and E. Davies, "Uranium Enrichment by Gas Centrifuge," Mills and Boon Limited, London, 1973.
19. Soubbaramayer, "Centrifugation," in Topics in Applied Physics, Vol. 35; Uranium Enrichment, Ed. by S. Villani, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
20. J. E. Park, "Calculation of the Isotope Distribution in a Gas Centrifuge," K/CSD/TM-36, 1981.

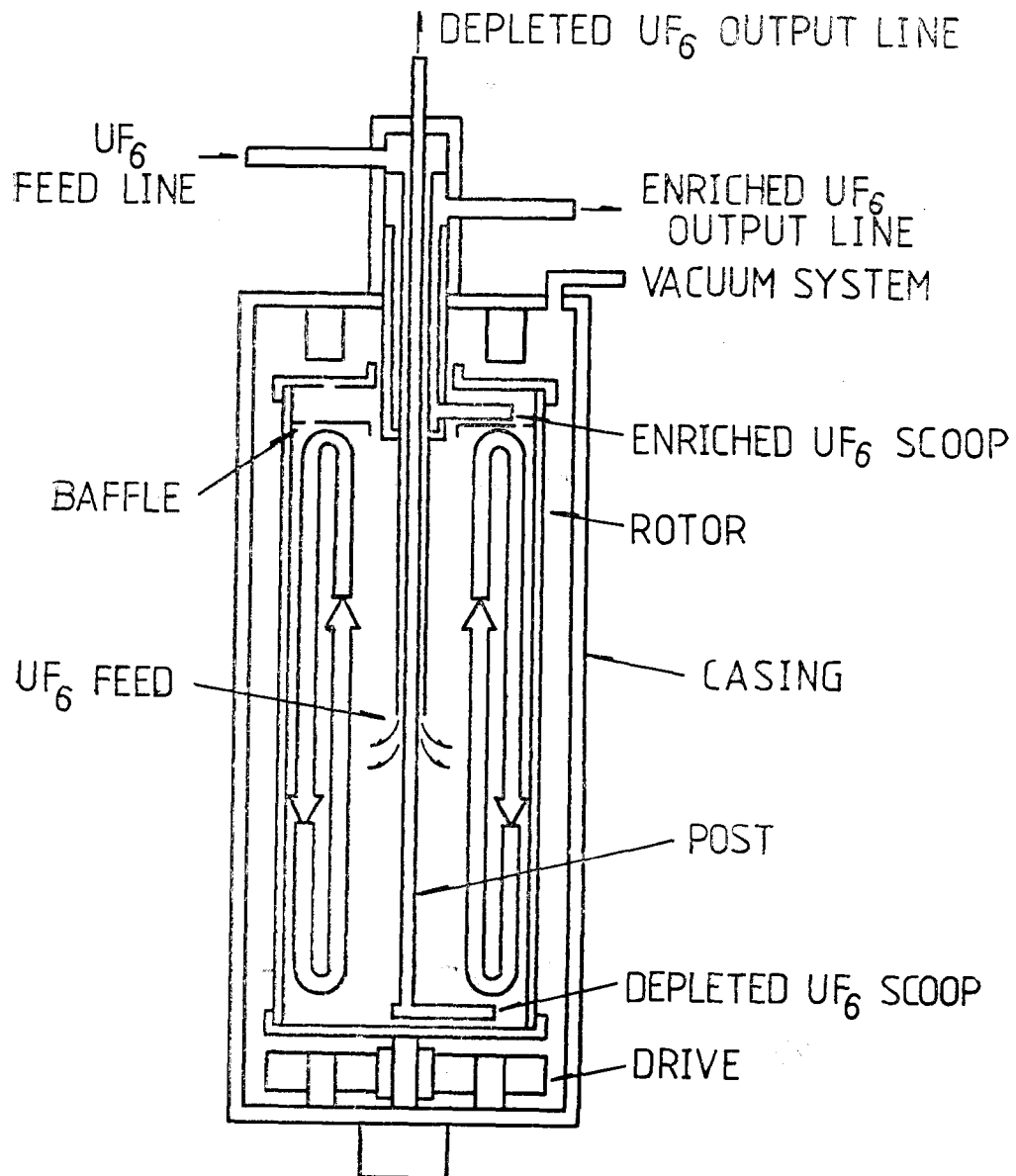


그림 1. 기체원심분리기