

《해설》

제어계통 이론의 기초개념

高明三

서울공대 전기공학과

(Received November 24, 1969)

〈서 론〉

최적제어이론¹⁾의 최근의 발달은 주로 물리적계통에 대한 수학적모형으로 사용해온 Vector 미분방정식에 기초를 두고있다.

고전적인 제어이론에서는 Laplace 변환을 이용한 入力-出力관계식인 傳達函數, 복소수함수이론에 근거를 둔 소위 주파수 응답, 極-零點配置와 같은 것이 核心표현이 되었고, 현대적인 관점에서는 상태변수(state variable)²⁾ 및 transition equation³⁾ 등으로 주어진 system을 모형화하면서 추상선형대수의 도움으로 해당문제의 해를 구하는데 力點을 두고 있다.

앞으로 현대적인 관점에서 본 제어계통 및 회로이론의 기초개념⁴⁾이 되는 state, controllability 및 observability에 관한 사항을 간단한 system과 관련시켜 설명한다.

〈동적모형과 state〉

자동제어이론을 연구하는데 있어서 우선 해당 계통의 동적현상이 deterministic model 혹은 nondeterministic model에 속하는가를 판정한 후 다시 그 모형의 범위를 좁혀야 한다. 이절에서는 모형형성에 필요한 순어를 설명한다.

제어해야할 물리적인 목적물을 plant라하며 실패로는,

- (i) 자동차
- (i i) 비행기
- (iii) 원자로
- (iv) 화학반응로

등 무수히 많이 들 수 있다. 상기한 plant를 제어하기 위해서는 어떤 물리적인 량 즉 入력을 변화시킬 수 있어야 하며 실지 문제에 있어서는,

- (i) 자동차의 가속기 혹은 앞바퀴
- (i i) 비행기의 제어기구
- (iii) 원자로의 제어봉

(iv) 화학반응로에 대한 원료 혹은 열적인 入력 등을 들 수 있다. 다음 위에 적은 入력으로 인한 plant 자체의 특성을 직접측정할 수 있는 물리적인 변수인 출력은 入력과 더불어 plant 제어에 있어서 가장 기본적인 량이다. 즉

(i) 속력 혹은 위치

(i i) 고도, 속력 혹은 비행기의 가속도

(iii) 중성자수

(iv) 반응으로 인한 반응로의 온도, 색 및 질 등을 들 수 있다.

어떤 dynamic system의 state란 入력의 시간 $t \geq t_0$ 에서의 system의 동작(혹은 특성)을 예측할 수 있는 $t=t_0$ 에서의 정보의 최소량으로 정의된다. 바꾸어 말하면 미래의 동작을 예측하는데 필요한 과거의 최소기특이라고 할 수 있겠다.

다음에 state에 관련된 몇가지 기본적인 개념을 실패를 들면서 더 설명하기로 한다. 지금 $t=t_0$ 에서의 state를 x_0 , $t=t_0$ 로부터 $t=t$ 동안 해당 system에 入된 入력을 $u(t)$ 및 出력을 $y(t)$ 로 표시하면 소위 상태방정식은

$$\dot{x}(t) = f(x_0; u) \quad (1)$$

$$y(t) = g(x_0; u) \quad (2)$$

가 된다.

지금 $u=0$ 시 $y=0$ 되게 하는 초기상태인 x_0 를 Zero state라 하여 이를 θ 로 표시하며

$$0 = g(\theta; 0) \quad (3)$$

을 만족한다. 즉 그림 1에서 inductor L_1 , L_2 에 흐

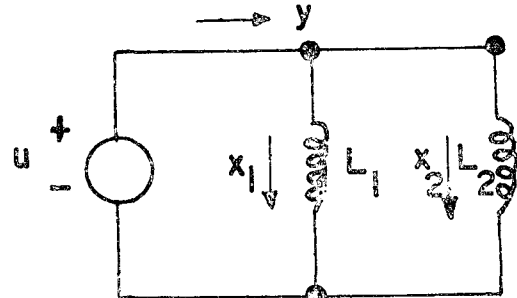


그림 1

트는 전류를 각각 x_1 , x_2 라하고 出力을 $y=x_1+x_2$ 로 정의한다면,

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ = x_1(t_0) + x_2(t_0) + \frac{1}{L_1} \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau + \frac{1}{L_2} \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$$

上式에서 zero state θ 를 구하기 위하여 $u(t)=0$, $y(t)=0$ 로 하면 결국

$$x_1(t_0) + x_2(t_0) = 0 \\ \therefore x_1(t_0) = -x_2(t_0)$$

$$\therefore \theta = \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ -x_1(t_0) \end{bmatrix}$$

가 되어 θ 는 unique 하지 않고 무수히 많이 존재함을 알 수 있다. 그러나 θ 는 unique 할 수도 있는데 이는 완전히 system의 초기상태에 따라 좌우된다.

다음 zero input에 관계되는 state로 ground state x_g 를 들 수 있는데 다음 식으로 정의된다.

$$x_g = \lim_{t \rightarrow \infty} f[x_0; 0]$$

여기서 주의할 것은 X_0 는 x_g 와는 다른 독립된 새로운 state임을 명심하여야 한다.

그러나 초기상태가 zero state 나 혹은 ground state 나에 따라서 해당 system의 응답 역시 각각 zero state response 및 ground state response로 불리우게 된다.

다음 주어진 system의 入力을 零으로 놓았을 때의 응답을 zero-input response라고 부른다. 이상과 같이 system에 임의의 入力을 인가시 system 자체의 상태까지 고려한 linearity에 관한 정의는 현대 회로이론 및 제통이론의 기본개념으로 등장하게 되었다. 즉 고전적인 linearity에 대한 정의에는 초기 state를 고려하지 않고 단순히 入力과 出力간의 additivity와 homogeneity⁷⁾만을 규정하였으나 현대적인 linearity의 정의⁸⁾에는 반드시 해당 system의 入力, 出力 및 state space가 선형임이 명시되어야 한다.

지금 여기서 zero-state response와 zero-input response를 소위 과도현상과 정상상태에서의 response와를 상호 비교해보는 것도 흥미있는 일일것이다. 그림 2는 RC並列回路에 定電流源이 인가된 회로이다. 지금 정상상태가 달성된 후 switch S를 "2"에서 "1"로 옮기면 C의 초기치전하의 R를 통한 방전과정에서의 $v_i(t)$ 의 모양은 zero-input response를 의미하므로

$$C \frac{dv_i(t)}{dt} + Gv_i(t) = 0 \\ v_i(0) = V_0$$

의 해로 주어진다. 즉

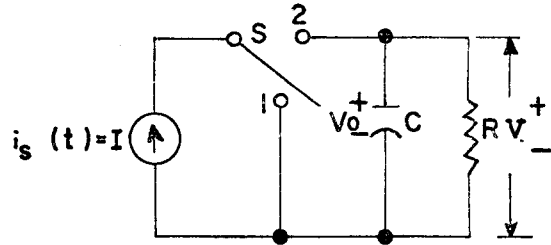


그림 2

$$v_i(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

가 된다. 다음 C의 초기치전압이 零인 상태에서 스위치 S를 "1"에서 "2"로 옮기면 C의 단자전압 $v_z(t)$ 는

$$v_z(t) = RI(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

로 주어지며 이는 곧 zero-state response이다. $v_i(t)$ 와 $v_z(t)$ 의 합은 해당 해로망의 電壓에 관한 완전한 response $v(t)$ 를 의미하며, 다음과 같다.

$$v(t) = v_i(t) + v_z(t)$$

$$= \underbrace{V_0 e^{-\frac{t}{RC}}}_{\text{zero input response}} + \underbrace{RI(1 - e^{-\frac{t}{RC}})}_{\text{zero state response}}$$

$$= \underbrace{(V_0 - RI)e^{-\frac{t}{RC}}}_{\text{transient solution}} + \underbrace{RI}_{\text{steady state solution}}$$

上式에 의해서 과도현상은 zero-input 및 zero-state response 양자에 관계되지만 정상상태의 해는 단지 zero state response의 일부와 관계됨을 알 수 있다

시간 t_0 에서 $x(t_0)$ 인 state에 있었던 어떤 system의 미래의 state $x(t)$ 는 소위 transition function인

$$x(t) = \phi(t; x(t_0), t_0) \quad t \geq t_0 \quad (5)$$

으로 주어진다. 따라서

$$\phi(t_0; x(t_0), t_0) = x(t_0) \quad (6)$$

및

$$\phi(t_2; \phi(t_1; x(t_0), t_1)) = \phi(t_2; x(t_0), t_0), \quad t_2 \leq t_1 \leq t_0 \quad (7)$$

가 성립하여 식 (7)은 ϕ 가 unique함을 의미한다.

causality의 원리에 의해서 어떤 dynamic system라도 state 관점에서 본 기술이 가능할 뿐만 아니라 system의 임의의 출력은 state의 함수임이 명백하다.

transition function ϕ 는 $t \leq t_0$ 인 모든 t 에 대해서 system에 주어진 input에 의존하는 것이 사실이지만 관계에 따라 식 (5) 및 (6)에 $u(t)$ 의 표시를 생략하였다.

이절에서 다룰 plants는 다음 두가지 가정을 만족

하는 dynamical system 이다.

- (1) plant의 state space X 는 n 차원 vector space 이다.
- (2) transition function는 초기 state $x(t_0)$ 및 $t \geq t_0$ 인 모든 t 에서의 입력 $u(t)$ 에 선형적으로 종속된다.

따라서 가정 (1)과 (2)를 만족하는 plant는 소위 선형 vector 미분방정식인

$$\frac{dx}{dt} = F(t)x + D(t)u(t) \quad (8)$$

$$y(t) = B(t)x(t)$$

혹은 vector 差分方程式인

$$x(t_{k+1}) = \Phi(t_k)(x(t_k) + A(t_k)u(t_k))$$

$$y(t) = B(t_k)x(t_k) \quad (9)$$

으로 주어지며 (8)은 continuous time dynamic system인 경우이고 (9)은 discrete time dynamic system인 경우이다. 단 $x(t)$, $u(t)$ 및 $y(t)$ 는 각각 vector이고 F, D , 및 B 는 constant matrix이다.

여기서 $u(t)$ 및 $u(t_k)$ 는 m 차원 입력 vector ($m \leq n$), $y(t)$ 및 $y(t_k)$ 는 p 차원 출력 vector ($p \leq n$)이고 state의 좌표 $x_i(t)$ 를 state variables라고 부른다.

문제의 복잡성을 덜고, 수학적인 복잡성을 피하기 위해서 다음과 같은 가정을 부가시킨다.

- (3) plant는 정상적이다. (바꾸어 말해서 $F(t)$, $D(t)$, $\Phi(t_k)$ 및 $A(t_k)$ 는 정수 行列이다)
- (4) plant의 入力은 1입, 즉 $m=1$
- (5) plant의 出力은 1입 즉 $p=1$
- (6) 식 (9)의 Φ 는 non-singular 임 즉 Φ^{-1} 가 존재한다.

이러한 가정 하에서는 식 (8)과 (9)는 각각 다음과 같이 될 것이다.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Fx + d u_1(t) \\ y_1(t) &= \langle b^*, x(t) \rangle \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\text{및 } x((k+1)T) = \Phi \{x(kT) + a u_1(kT)\}, (T > 0) \} \quad (11)$$

$$y_1(kT) = \langle b^*, x(kT) \rangle$$

단 $u_1(t)$ 는 區間 $\cdots (T, 0), (0, T), \cdots$ 에서 piece-wise constant function이며 T 는 정의 정수, a, d 는 vector b^* 는 costate vector 임

식 (10)의 해는

$$x((k+1)T) = e^{FT} x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} [e^{(T-\tau)F}] d u_1(kT) d\tau \quad (12)$$

으로 주어지므로, 만일

$$\Phi = e^{TF} \quad (13)$$

$$a = \left(\int_0^T e^{\tau F} d\tau \right) d \quad (14)$$

가 성립하면 식 (10)은 식 (11)로 곧칠 수 있다.

vector d, a 및 b 는 plant가 入力 및 出力에 대해서 어떻게 구속되어 있는가를 나타낸다. 만일 주어진 plant의 모든 state가 入力에의 직접적인 영향을 받는다면 이는 곧 해당 plant가 入力에 관한 구속조건이 없음을 의미한다. 이와 마찬가지로 만일 모든 state variable $x_1(t)$ 가 측정 가능하다면 plant는 出力에 관한 구속조건이 없다고 본다.

직관적인 이해를 돕기 위하여 식 (11)을 block diagram으로 표시하기로 한다. 각 block는 matrix 乘積을 나타내다.

식 (10)과 (11)로 주어지는 plant를 제어하기 위

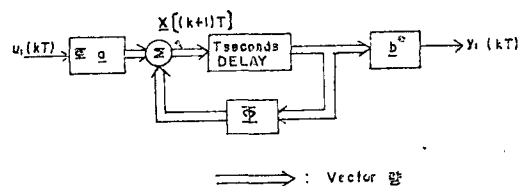


그림 3

해서는 入力인 $u_1(t)$ 혹은 $u_1(kT)$ 를 현재 및 장래의 desired state 인 $x^d(t)$ 이 함수로 표시 되어야 한다. 여기서 desired state란 소위 고전적인 자동제어론에서의 "desired output"의 일반화된 개념이다. 문제의 간단화를 위하여 다시 다음과 같은 가정을 설정한다.

(7) plant의 desired state는 모든 t 에 대해서 항상 등적으로 zero 임.

換言하면 제어목적은 임의의 초기상태를 equilibrium state으로 옮기는데 있다. 여기서 equilibrium state란 $t \geq t_0$ 인 모든 t 에 대해서 만일 $x(t_0) = 0$ 및 $u_1(t) = 0$ 이면 $\phi(t; 0, t_0) = 0$ 인 상태 즉 모든 $t \geq t_0$ 에 대해서 平衡상태하에서의 plant는 0에 머물어 있음을 의미한다. 이러한 가정하에서 plant가 出力에 관한 구속조건이 없으

$$u_1(t) = g\{y_1(s), s \leq t; t\} \quad (15)$$

$$\text{혹은 } u_1(kT) = g\{y_1(jT), j \leq k; kT\} \quad (16)$$

가 성립한다면 제어법칙은 시간적으로 연속이던 離散的이던 간에

$$u_1(t) = g(x(t), t) \quad (17)$$

$$\text{혹은 } u_1(kT) = g(x(kT), kT) \quad (18)$$

으로 표시된다.

이들 관계식에서 g 는 임의의 함수이며 만일 g 가 x 혹은 y_1 에 관해서 선형이면 제어법칙은 선형이라고 한다. 여기서 kT 는 sampling point 임.

<제어성, Controllability>

이 절에서는 plant는 항상 선형, 정상적(stationary) 및 單一入力으로 주어졌다고 한다.

만일 有限區間인 $0 \leq t \leq t_1$ 에서 $\phi(t; x, 0) = 0$ 을 만족하는 제어신호 $u_1(t)$ 가 존재하는 경우에는 plant의 state x 는 제어가능하다고 말한다. 일반적으로 시간 t_1 은 x 에 종속된다. 만일 모든 state가 제어가능할 경우,

우리들은 해당 plant가 완전하게 제어할 수 있다고 말한다.

[정리 1] 離散的인 plant의 완전제어를 위한 필요하고도 충분한 조건은

$$a, \phi^{-1}, a, \dots, \phi^{-n+1}a$$

가 一次독립인 경우이다.

이 정리를 증명하기에 앞서 우선 몇가지 예비적인 사실을 소개한다.

모든 정수의 i 에 대하여 $\phi^{-i+1}a$ 를 e_i 로 표시하면 기압법과 ϕ 가 nonsingular란 사실을 이용하여 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다. 즉 적절한 제어신호의 인가로 최고 q 번의 제어과정을 거쳐 원점으

로 옮길 수 있는 모든 초기상태의 집합인 $\Gamma(q)$ 는

$$\Gamma(q) = \left\{ x: x = \sum_{i=1}^q \xi_i e_i \right\} \quad (19)$$

으로 주어지며 여기서 ξ_i 는 임의의 실수치이다. 또한

만일 e_{k+1} 과 e_1, \dots, e_k 등이 一次종속이면 모든 $m > k$ 에 대해서 e_m 역시 e_{k+1} 와 마찬가지로 e_1, \dots, e_k 의 一次종속이다. 따라서 만일

$$\begin{aligned} \Gamma(k) &= \Gamma(k+1) \text{이면 모든 } m \geq k \text{에 대해서} \\ \Gamma(k) &= \Gamma(m) \text{가 성립한다.} \end{aligned} \quad (20)$$

정리 1의 증명

充分條件: 만일 集合 e_1, \dots, e_n 이 一次獨立이면 이는 곧 X 의 basis이다. 그러므로 모든 상태는 최고로 $q=n$ 번에 걸친 제어과정을 통해서 원점으로 옮겨질수있으므로 해당 plant는 완전히 제어가능하다

必要條件: 반대로 n 개의 vector인 e_1, e_2, \dots, e_n ($k < n$)만이 一次獨立임과 동시에 plant가 완전 제어가능하다고 가정한다. 관계식 (20)에 의해서 이들 vector들의 처음 k 만이 一次獨立이므로 모든 $m \leq k$ 에 대해서 $\Gamma(k) = \Gamma(m)$ 가 성립한다. 따라서 $\Gamma(k)$ 는 제어할수있는 모든상태의 集合이다. 그러나 $\dim \Gamma(k) = k < n$ 이므로 $\Gamma(k) \neq X$ 가 되어 plant가 완전히 제어가능하다는 가정에 모순된다. 그러므로 정리 1은 항상 성립한다. 단, \dim 은 dimension의 약자임.

정리-1과 並行하여 continuons time plant의 완전제어를 위한 필요하고도 충분한 조건은 vectors

$$d, Fd, \dots, F^{n-1}d$$

가 一次獨立인 경우이다.

[정리-2] 離散的이고 완전제어할수 있는 plant에 있어서 모든 state가 sampling period의 최소수 ($\leq n$) 이내에서 원점으로 되돌아갈 수 있게하는 필요하고도 충분한 조건은 제어法則이

$$u_1(kT) = -\langle e_1^*, x(kT) \rangle \quad (21)$$

으로 주어질 경우이다. 단 여기서 e_1^* 는 basis e_1, \dots, e_n 의 dual basis인 e_1^*, \dots, e_n^* 의 첫번째 vector이다.

閉 loop系의 vector block선도는 그림 (4)와 같으며 이 그림에서 제어법칙 (21)이 feedback 원리를 만족함을 알 수 있다. 제어법칙이 feedback적인 성

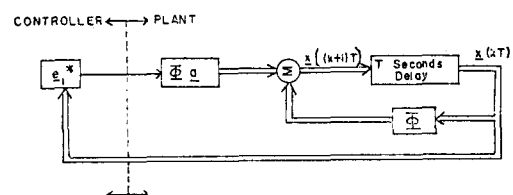


그림 4

적을 띠게 된 것은 先驗的인 가정 (a priori assumption)에서가 아니라 모든 state가 최단시간 내에 원점으로 옮겨야 할 조건의 결과라고 볼 수 있다.

[정리-3] 연속적이며 완전 제어가능한 plant에 있어서 어떤 초기 state도 임의시간 이내에 식 (21)로 주어지는 제어법칙(단 이경우에는 $T=\tau/n$)의 사용으로 原点으로 복귀시킬 수 있다.

정리 2와 3은 선형제어제통의 기본정리로서 소위 dead-beat 應答과 plant의 완전제어성과의 상관관계를 표시하며 정리 자체의 증명은 생략한다.

<제어기의 최적화>

이절에서는 해당 plant는 항상 linear, stationary, 단일입력 및 離散의입을 가정한다. 이러한 경우 어떤 제어기계통을 최적화하기 위해서는 소위 performance index에 관한 개념을 도입할 필요가 있다. 이 performance index는 cost functional라고도 부르고 또한 특히 離散系에 있어서는 系의 trajectory에 따른 오차의 합으로 정의되는 경우도 있다. 지금 이 오차는 正値二次形式인 $\mu^k \|x(kT)\|^2 Q$ 으로 표시하는 경우 performance index는

$$V(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \| \phi(kT; x, 0) \|^2 Q \quad (22)$$

으로 주어진 초기 state x 의 함수가 된다. 여기서 Q 는 positive definite matrix; μ 는 positive number, $\| \cdot \|$ 는 norm을 각각 표시한다. 따라서 우리들은 다음과 같은 질문을 생각할 수 있다. 즉 제어기의 최적화 문제로서 모든 초기 상태에 대해서 식 (22)을 최소로 하기 위한 control를 어떻게 구할 것인가 하는 것은 현대 자동제어 이론의 중심을 이루고 있다고 해도 과언이 아니다. 식 (22)을 일반화하면

$$J = J_1(x(T)) + \int_0^T J_2(x, u, t) dt \quad (23)$$

인 형식으로 주어지며 J_1 은 종단상태인 $x(T)$ 에서 계산한 것이고 J_2 는 trajectory 상에서 계산된 양이다. 일반적으로 J 의 종류에 따라 최적제어를 위한 plant의 대상이 달라진다. 특히 kalman은 만일 식 (22)의 Q 가 positive definite이면 임의의 $\mu > 0$ 에 대해서 제어기의 최적제어문제의 해가 존재하기 위한 필요하고도 충분한 조건은 해당 plant의 완전제어에 있으며, 이 경우의 제어법칙은 唯一하고 선형임과 동시에 stationary 할뿐만 아니라 만일 $\mu \geq 1$ 면 閉 loop system은 近근적으로 안정함을 밝혔다. 한편 Bellman은 sampling points $0, \dots, (N+1)T$ 에서 정의된 제어신호가 최적화되기 위해서는 최초의 제어신호에 기인한 상태가 무엇이던간에 Sampling points $(N=1)T$ 에서 정의된 제어신호가 최적화되어야 함을

밝혔다. Bellman의 이 이론은 최적제어法則의 단계적인 결정을 의미한다.

<관측성, Observability>

관측성은 제어성의 dual한 개념을 지니고 있다. 여기서도 역시 plant는 linear, stationary, discrete time 및 single output라고 가정한다.

지금 X^* 를 State space X 의 dual vector space 즉 X 에서의 모든 선형함수의 공간이라고 한다. 여기서 X^* 의 원소인 z^* 혹은 X^* 를 costate라고 부른다.

어떤 plant의 costate z^* 는 만일 $t=0$ 에서의 임의의 상태 x 에서의 값, $\langle z^*, x \rangle$, 이 有限區間 $0 \leq t \leq t_2$ 동안 측정된 출력신호인

$$y_1(t) = \langle b^*, \phi(t; x, 0) \rangle$$

로 결정할 수 있는 경우 해당 plant의 costate z^* 는 관측가능하다고 말하며 시간 t 는 일반적으로 z^* 에 따라 달라진다. 만일 모든 costate가 관측가능한 경우 해당 plant가 완전관측할 수 있다고 말한다. 제어성에 관한 정리 1, 2, 3과 유사하게 관측성에 대해서 똑같이 해당 정리를 내릴 수 있다. 그중 한가지만 소개하면 다음과 같다.

[정리-4] 어떤 plant의 완전 관측가능을 위한 필요하고도 충분한 조건은 covector들의 集合인 $(\phi^*)^{-1}b^*, \dots, (\phi^*)^{-n}b^*$ 가 一次獨立되는데 있다.

그림 5는 관측성 및 제어성여부를 나타내는 vector block diagram이며 x_i 는 상태변수인, 여기서

- x_1 : 제어가능하지만 관측할 수 없다. (Sc)
- x_2 : 제어 및 관측 모두 가능함 (Sco)
- x_3 : " 모두 불가능함 (Sn)
- x_4 : 관측가능하지만 제어할 수 없다. (So)

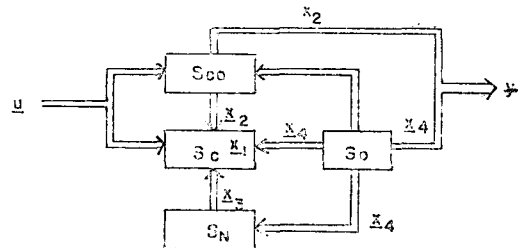


그림 5

<결 언>

State, Controllability 및 Observability에 관한 개념을 소개함으로써 현대 제어공학의 이론적인 분야가 과거의 소위 고전적인 servomechanism 이론과 그 方向이 전혀 다를 뿐만 아니라 소위 공학의 순수

한 이론분야로서 현재 제어공학분야에서 차지하고있는 비중이 매우 큰 것임을 설명하였다. 차후 기회가 있는 대로 구체적인 control system에 관한 예를 통해서 optimization에 관한 technique를 소개하기로 하고 이것으로 본 해설을 끝맺는다.

References

- (1) Athans & Falb: Optimal Control 1966. McGraw-Hill Book
- (2) Kuh & Rohrer: The State-Variable Approach to Network Analysis. Proc. of IEEE, Vol. 53, No.7, July 1965
- (3) Zadeh & Desoer: Linear System Theory 1963 McGraw-Hill
- (4) Zadeh & Polak: System Theory 1969 McGraw-Hill
- (5) Kalman, Falb & Arbib: Topics in Mathematical System Theory 1969
- (6) Timothy & Bona: State Space Analysis 1968 McGraw-Hill
- (7) Halmos: Finite Dimensional Vector Spaces 2nd ed. 1958. Van Nostrand