

두 노드 다군 중성자 확산 문제 해석을 위한 통합노달법과 준해석적
노달법의 비교

**A Comparison between Unified Nodal Method and Semi-Analytic Nodal Method
for Two-Node Multi-Group Neutron Diffusion Problem**

이현철, 주형국
한국원자력연구소
대전광역시 유성구 덕진동 150번지

김창효
서울대학교
서울시 관악구 신림동 산 51-2

요 약

다군 비선형 소격격자차분 노달법에 필요한 1차원 두 노드 다군 중성자 확산 문제 해법으로 통합노달법(UNM)과 준해석적 노달법(SANM)을 2군과 8군 문제에 대해 각각 비교하였다. 근사적 UNM/ANM과 4차 유효선원항을 이용한 SANM은 매우 정확한 결과를 보였다. 전산시간 면에서는 8군 까지는 근사적 UNM/ANM이 훨씬 유리했으나 더 많은 군수에 대해서는 SANM이 유리해 질 것으로 예상된다. 따라서 이 두 방법은 서로 보완적으로 사용될 수 있을 것이다.

Abstract

As 1-D two node multi-group neutron diffusion problem solver which is used in nonlinear coarse mesh finite difference nodal method, unified nodal method(UNM) and semi-analytic nodal method(SANM) are compared in terms of 2-group and 8-group problems. Approximate UNM/ANM and SANM with quartic effective source term showed very accurate results. As for the computation time, approximate UNM/ANM is much more effective than SANM up to 8-group problem. However, SANM is expected to be more effective in many-group problems. The two methods can be used complementarily.

1. 서론

1980년대 초 비선형 소격격자유한차분(Coarse Mesh Finite Difference:CMFD) 노달법[1]이 개발된 후 많은 노달 코드에서 메모리 절약이나 가속을 위해 비선형 CMFD 노달법이 채택되고 있다[2-4]. 비선형 CMFD 노달법에서는 k 번째 노드와 $k+1$ 번째 노드 사이에서의 중성자류를 근사하는데 있어서 유한차분근사에 보정항을 추가하여 다음과 같이 근사한다.

$$J_k = -\tilde{D}_k(\bar{\phi}_{k+1} - \bar{\phi}_k) + \hat{D}_k(\bar{\phi}_{k+1} + \bar{\phi}_k) \quad (1)$$

식 (1)에서 우변의 첫 번째 항은 유한차분근사에 의한 항이고 두 번째 항은 보정항이다. 식 (1)과 같은 근사를 이용하면 전체 문제영역에 대해 유한차분식과 유사한 형태의 비선형 CMFD 방정식을 얻을 수 있다. 여기서 보정인자 \hat{D}_k 는 반복계산 중간에 주기적으로 갱신된다. 보정인자의 갱신을 위해, 해당 두 노드의 평균 중성자속을 제한 조건으로 갖는 횡방향으로 적분된 두 노드 문제에 대해 노달 계산을 수행하고 이때 얻어지는 경계면의 중성자류를 이용하여 다음과 같이 보정인자 \hat{D}_k 를 갱신한다.

$$\hat{D}_k = \frac{J_k + \tilde{D}_k(\bar{\phi}_{k+1} - \bar{\phi}_k)}{\bar{\phi}_{k+1} + \bar{\phi}_k} \quad (2)$$

이와 같은 비선형 CMFD 노달법을 이용하면 노달 계산에만 의존해서 구한 해와 같은 해를 얻을 수 있다. 이것은 보정인자 \hat{D}_k 를 등가인자로 하는 확장된 형태의 등가 이론[5]으로 볼 수 있다. 따라서 비선형 CMFD 노달법의 정확성은 두 노드 문제 계산에 사용되는 노달법의 정확성에 좌우된다. 2군 중성자확산 문제의 경우 두 노드 문제 계산을 위한 노달법으로 노달전개법(Nodal Expansion Method:NEM), 해석적 노달법(Analytic Nodal Method:ANM), 해석함수전개노달법(Analytic Function Expansion Method:AFEN) 그리고 이들을 하나의 수식체계로 통합한 통합노달법(Unified Nodal Method:UNM)[6,7]에 의한 해법 등이 개발되었다. 그러나 다군 중성자확산 문제의 경우 그 해법에 대한 연구가 활발하지 못하였다. 이 논문에서는 두 노드 2군 중성자확산 문제에 대해 개발되었던 UNM을 다군 중성자확산 문제에 대해 적용 가능하도록 확장하였다. 또한 태생적으로 다군 확장이 자연스러운 준해석적 노달법(Semi-Analytic Nodal Method:SANM)[8]에 의한 두 노드 해법을 개발하였고 UNM과 SANM의 성능을 몇 가지 두 노드 문제를 이용하여 비교 검증하였다.

2. 두 노드 다군 중성자확산 문제 해석을 위한 노달법

균질화된 노드 내에서의 횡방향 적분된 다군 중성자 확산 방정식은 행렬을 이용하여 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$-\mathbf{D}\frac{d^2}{du^2}\boldsymbol{\phi}(u)+\mathbf{R}\boldsymbol{\phi}(u)=\frac{1}{k_{eff}}\mathbf{F}\boldsymbol{\phi}(u)+\mathbf{S}\boldsymbol{\phi}(u)+\mathbf{Q}(u)-\mathbf{L}(u) \quad (3)$$

여기서, \mathbf{D} 와 \mathbf{R} 은 각각 D_g 와 Σ_{rg} 를 원으로 갖는 대각 행렬이고 \mathbf{F} 와 \mathbf{S} 는 각각 $\kappa_g\nu\Sigma_{fg}$ 과 Σ_{gg} 을 원으로 갖는 행렬이며 $\mathbf{Q}(u)$ 와 $\mathbf{L}(u)$ 는 외부 선원항과 횡방향 누설 항이다. 고유치 문제의 경우 $\mathbf{Q}(u)\equiv 0$ 이며 고정 선원항 문제의 경우 $k_{eff}=1$ 이다.

식 (3)과 같은 다군 중성자확산 방정식에 대한 노달해법은 우변 선원항을 어떻게 취급하느냐에 따라 크게 두 가지로 분류될 수 있다. 핵분열 및 산란 선원항을 우변에 그대로 두고 구해진 중성자속을 이용하여 선원항을 반복적으로 갱신해 주는 선원항 반복계산법과 우변의 핵분열 및 산란 선원항을 좌변으로 옮겨 선원항 반복계산 없이 한 번에 푸는 직접해법이 그것이다. 이 두 가지 모두 최종적으로 풀어야 하는 방정식은 다음과 같은 형태이다.

$$-\mathbf{D}\frac{d^2}{du^2}\boldsymbol{\phi}(u)+\mathbf{A}\boldsymbol{\phi}(u)=\mathbf{Q}_e(u) \quad (4)$$

각 방법에서의 행렬 \mathbf{A} 와 유효 선원항 $\mathbf{Q}_e(u)$ 에 대한 정의는 <표 1>과 같다.

표 1. 각 해법에 따른 행렬 \mathbf{A} 와 유효 선원항 $\mathbf{Q}_e(u)$ 에 대한 정의

	\mathbf{A}	$\mathbf{Q}_e(u)$
직접해법	$\mathbf{A}=\mathbf{R}-\frac{1}{k_{eff}}\mathbf{F}-\mathbf{S}$	$\mathbf{Q}_e(u)=\mathbf{Q}(u)-\mathbf{L}(u)$
선원항 반복법	$\mathbf{A}=\mathbf{R}$	$\mathbf{Q}_e(u)=\frac{1}{k_{eff}}\mathbf{F}\boldsymbol{\phi}(u)+\mathbf{S}\boldsymbol{\phi}(u)+\mathbf{Q}(u)-\mathbf{L}(u)$

유효 선원항을 근사하는 방법으로는 여러 가지가 있을 수 있으나, 이 논문에서는 유효 선원항을 2차 또는 4차의 다항식으로 근사하는 것만을 다루었다. 직접해법의 경우 유효선원항이 간단하여 2차 다항식만으로도 좋은 결과를 예상할 수 있으나 선원항 반복법의 경우 유효 선원항에 핵분열 선원항이나 산란 선원항이 포함되어 있어 높은 차수의 다항식근사가 요구된다. 이 논문에서는 직접해법은 UNM으로, 선원항 반복법은 SANM으로 구현하여 비교하였다.

2.1 두 노드 다군 중성자확산 문제 해석을 위한 통합노달법

참고문헌 7에 소개되어 있는 두 노드 2군 중성자확산 문제 해석을 위한 통합노달법 기본 방정식은 두 노드 다군(G 군) 중성자확산 문제에도 그대로 적용될 수 있다. 참고문헌 7에 소개되어 있듯이 주어진 두 노드에 대해 각 노드에서의 중성자속 평형 조건, 두 노드 경계면에서의 중성자속 및 중성자류 연속 조건, 그리고 각 노드별 두 개의 가중잔차식을 이용하면 다음과 같은 방정식을 얻을 수 있다.

i) 중성자속 평형 조건

$$12\mathbf{B}^s \mathbf{C}_2^s + 2\mathbf{B}^s \mathbf{C}_4^s = a^s (\mathbf{A}^s \mathbf{C}_0^s - \mathbf{Q}_{e0}^s) \quad (s = l, r) \quad (5)$$

ii) 경계면에서의 중성자속 연속 조건

$$\mathbf{C}_1^l + \mathbf{C}_1^r = (\mathbf{C}_0^r + \mathbf{C}_2^r) - (\mathbf{C}_0^l + \mathbf{C}_2^l) \quad (6)$$

iii) 경계면에서의 중성자류 연속 조건

$$\mathbf{B}^l (2\mathbf{C}_1^l + \mathbf{C}_3^l) - \mathbf{B}^r (2\mathbf{C}_1^r + \mathbf{C}_3^r) = -\mathbf{B}^l (6\mathbf{C}_2^l + \mathbf{C}_4^l) - \mathbf{B}^r (6\mathbf{C}_2^r + \mathbf{C}_4^r) \quad (7)$$

iv) 제 1 모멘트 가중잔차식

$$\mathbf{M}_1^s \mathbf{C}_1^s + \mathbf{M}_3^s \mathbf{C}_3^s = -\mathbf{Q}_{e1}^s \quad (s = l, r) \quad (8)$$

v) 제 2 모멘트 가중잔차식

$$\mathbf{M}_2^s \mathbf{C}_2^s + \mathbf{M}_4^s \mathbf{C}_4^s = -\mathbf{Q}_{e2}^s \quad (s = l, r) \quad (9)$$

여기서 a^s 는 노드 크기이고 \mathbf{B}^s , \mathbf{A}^s , \mathbf{M}_i^s 는 $G \times G$ 차원 행렬이고 \mathbf{C}_i^s , \mathbf{Q}_{ei}^s 는 G 차원 벡터이다. 한편 식 (5)에서 (9)까지 8개의 조건에 경계면 오른쪽($s = r$)과 왼쪽($s = l$) 노드에서의 평균중성자속 제한조건인 $\mathbf{C}_0^s = \bar{\phi}^s$ 를 더하면 10개의 방정식으로 양쪽 노드에서 총 10개의 모든 계수($\mathbf{C}_i^s (s = l, r; i = 0, \dots, 4)$)를 구할 수 있다. 이상과 같이 구해진 계수 \mathbf{C}_i^s 를 이용하면 경계면에서의 중성자류를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$J_g = -\frac{D_g^l}{a^s} (2C_{1g}^l + 6C_{2g}^l + C_{3g}^l + C_{4g}^l) \quad (10a)$$

$$\text{또는 } J_g = -\frac{D_g^l}{a^s} (2C_{1g}^r - 6C_{2g}^r + C_{3g}^r - C_{4g}^r) \quad (10b)$$

이상과 같은 과정은 2군 문제와 동일하므로 자세한 유도 과정은 참고문헌 7에 맡기고 이 논문에서는 생략하였다. 통합노달법에서는 노달해법 선택에 따라 반응행렬 $\mathbf{M}_i^s (s = l, r; i = 1, \dots, 4)$ 의 정의가 달라지며 그에 따라 노달해도 달라진다. NEM의 경우 반응행렬들은 다음과 같이 정의된다[7].

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2 = -\mathbf{A} \quad (11a)$$

$$\mathbf{M}_3 = \frac{6}{a^2} \mathbf{D} + \frac{1}{10} \mathbf{A} \quad (11b)$$

$$\mathbf{M}_4 = \frac{10}{a^2} \mathbf{D} + \frac{1}{14} \mathbf{A} \quad (11c)$$

식 (11)에서 위 첨자 s 가 생략되었음을 유의하자. 이 경우 반응행렬들은 행렬 \mathbf{D} 와 \mathbf{A} 만으로 표현되므로 쉽게 다군 문제에 대해 적용이 가능하다. 반면 ANM의 경우 반응행렬은 다음과 같이 정의 된다[7].

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2 = -\mathbf{A} \quad (12a)$$

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{D} \mathbf{R} \hat{\mathbf{H}}_i \mathbf{R}^{-1} \quad (i = 3, 4) \quad (12b)$$

$$\text{단, } \hat{\mathbf{H}}_i = \begin{bmatrix} \hat{H}_{i1} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & \hat{H}_{iG} \end{bmatrix}$$

$$\hat{H}_{3p} = \frac{2\tilde{\kappa}_p^2 K_2(\tilde{\kappa}_p)}{a^2 K_3(\tilde{\kappa}_p)}$$

$$\hat{H}_{4p} = \frac{2\tilde{\kappa}_p^2 K_3(\tilde{\kappa}_p)}{a^2 K_4(\tilde{\kappa}_p)}$$

$$K_1(x) = \cosh(x), \quad K_2(x) = \sinh(x)$$

$$K_3(x) = xK_1(x) - K_2(x), \quad K_4(x) = x^2K_2(x) - 3K_3(x)$$

$$\tilde{\kappa}_p = \frac{k_p a}{2}, \quad k_p a_u = \sqrt{\lambda_p}$$

여기서 λ_p 는 행렬 \mathbf{A} 의 고유치이고 \mathbf{R} 은 상사변환 행렬이다. 2군 문제의 경우 행렬 \mathbf{A} 의 고유치를 구하는 것이 간단하나 다군 문제의 경우 행렬 \mathbf{A} 의 고유치를 구하는 것은 전산시간 면에서 현실적으로 어려움이 있다. 따라서 이 논문에서는 λ_p 를 구하지 않고 반응행렬 \mathbf{M}_3 과 \mathbf{M}_4 를 근사적으로 구하는 방법을 택하였다. AFEN을 다군으로 확장하기 위하여 이와 유사한 방법이 사용된 적이 있다[9]. 우선 \hat{H}_{ip} 를 다음과 같이 $\tilde{\kappa}_p$ 에 관한 유리함수로 근사하자.

$$\hat{H}_{ip} \approx \frac{1}{a} \frac{\hat{P}_{ip}}{\hat{Q}_{ip}} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{단, } \hat{Q}_{3p} &= 1.0 + 5.4545454545 \times 10^{-2} \tilde{\kappa}_p^2 + 2.88600288600 \times 10^{-4} \tilde{\kappa}_p^4 \\ &= 1.0 + 1.3636363636 \times 10^{-2} a^2 \lambda_p + 1.80375180375 \times 10^{-5} a^4 \lambda_p^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{P}_{3p} &= 6.0 + 4.7272727273 \times 10^{-1} \tilde{\kappa}_p^2 + 1.21212121212 \times 10^{-2} \tilde{\kappa}_p^4 \\ &= 6.0 + 1.1818181818 \times 10^{-1} a^2 \lambda_p + 7.57575757576 \times 10^{-4} a^4 \lambda_p^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{4p} &= 1.0 + 3.2967032967 \times 10^{-2} \tilde{\kappa}_p^2 + 1.11000111000 \times 10^{-4} \tilde{\kappa}_p^4 \\ &= 1.0 + 8.2417582418 \times 10^{-3} a^2 \lambda_p + 6.93750693750 \times 10^{-6} a^4 \lambda_p^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{P}_{4p} &= 10.0 + 6.1538461538 \times 10^{-1} \tilde{\kappa}_p^2 + 5.99400594006 \times 10^{-3} \tilde{\kappa}_p^4 \\ &= 10.0 + 1.5384615846 \times 10^{-1} a^2 \lambda_p + 3.74625374625 \times 10^{-4} a^4 \lambda_p^2 \end{aligned}$$

그러면 식 (12b)로부터 다음과 같이 반응행렬 \mathbf{M}_3 , \mathbf{M}_4 를 구할 수 있다.

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{DR}\hat{\mathbf{H}}_i\mathbf{R}^{-1} \approx \frac{1}{a} \mathbf{DR}\hat{\mathbf{Q}}_i^{-1}\hat{\mathbf{P}}_i\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{a} \mathbf{DQ}_i^{-1}\mathbf{P}_i \quad (14)$$

$$\text{단, } \mathbf{Q}_{3p} = 1.0\mathbf{I} + 1.3636363636 \times 10^{-2} a^2 \tilde{\mathbf{A}} + 1.80375180375 \times 10^{-5} a^4 \tilde{\mathbf{A}}^2$$

$$\mathbf{P}_{3p} = 6.0\mathbf{I} + 1.1818181818 \times 10^{-1} a^2 \tilde{\mathbf{A}} + 7.57575757576 \times 10^{-4} a^4 \tilde{\mathbf{A}}^2$$

$$\mathbf{Q}_{4p} = 1.0\mathbf{I} + 8.2417582418 \times 10^{-3} a^2 \tilde{\mathbf{A}} + 6.93750693750 \times 10^{-6} a^4 \tilde{\mathbf{A}}^2$$

$$\mathbf{P}_{4p} = 10.0\mathbf{I} + 1.5384615846 \times 10^{-1} a^2 \tilde{\mathbf{A}} + 3.74625374625 \times 10^{-4} a^4 \tilde{\mathbf{A}}^2$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}$$

식 (14)에서 반응행렬 \mathbf{M}_3 , \mathbf{M}_4 는 행렬 \mathbf{D} 와 \mathbf{A} 만으로 표현되므로 간단히 구할 수 있다. 이상과 같이 일단 반응행렬을 구하고 나면 모든 계산과정은 2군 문제의 경우와 동일하다.

2.2 두 노드 다군 중성자확산 문제 해석을 위한 준해석적 노달법

우선 식 (4)와 같이 주어지는 횡방향 적분된 1차원 방정식에서 유효 선원항을 다음과 같이 4차의 다항식으로 근사한다.

$$Q_{eg}^s(u) \approx \tilde{Q}_{eg}^s(u) = \sum_{i=0}^4 P_i\left(\frac{2u}{a}\right) \tilde{Q}_{eig}^s \quad (15)$$

단, $P_n(x)$: n 차 Legendre 다항식

그러면 주어진 유효 선원항에 대해 식 (4)의 해석해는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\phi_g^s(u) = A_g^s \sinh(\kappa_g^s u) + B_g^s \cosh(\kappa_g^s u) + \sum_{i=0}^4 C_{ig}^s P_i\left(\frac{2u}{a^s}\right) \quad (16)$$

여기서 다항식으로 나타나는 항은 특별해로서 전개 계수는 다음과 같이 구해진다.

$$C_{0g}^s = \frac{\tilde{Q}_{e0g}^s}{\Sigma_{rg}^s} + \frac{3}{(\tilde{\kappa}_g^s)^2} \frac{\tilde{Q}_{e2g}^s}{\Sigma_{rg}^s} + \frac{5[21 + 2(\tilde{\kappa}_g^s)^2]}{(\tilde{\kappa}_g^s)^4} \frac{\tilde{Q}_{e4g}^s}{\Sigma_{rg}^s} \quad (17a)$$

$$C_{1g}^s = \frac{\tilde{Q}_{e1g}^s}{\Sigma_{rg}^s} + \frac{15}{(\tilde{\kappa}_g^s)^2} \frac{\tilde{Q}_{e2g}^s}{\Sigma_{rg}^s} \quad (17b)$$

$$C_{2g}^s = \frac{\tilde{Q}_{e2g}^s}{\Sigma_{rg}^s} + \frac{35}{(\tilde{\kappa}_g^s)^2} \frac{\tilde{Q}_{e4g}^s}{\Sigma_{rg}^s} \quad (17c)$$

$$C_{3g}^s = \frac{\tilde{Q}_{e3g}^s}{\Sigma_{rg}^s} \quad (17d)$$

$$C_{4gu}^s = \frac{\tilde{Q}_{e4gu}^s}{\Sigma_{rg}^s} \quad (17e)$$

한편 식 (16)에서 동차해는 각 노드에서의 평균 중성자속 제한 조건과 노드 경계면에서의 중성자속 및 중성자류 연속 조건에 의해 다음과 같이 구해진다.

$$B_g = \frac{\tilde{\kappa}_g^s}{\sinh(\tilde{\kappa}_g^s)} (\bar{\phi}_g^s - C_{0g}^s) \quad (18a)$$

$$\begin{pmatrix} A_g^l \\ A_g^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh(\tilde{\kappa}_g^l) & \sinh(\tilde{\kappa}_g^r) \\ \beta_g^l \tilde{\kappa}_g^l \cosh(\tilde{\kappa}_g^l) - \beta_g^r \tilde{\kappa}_g^r \cosh(\tilde{\kappa}_g^l) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} \quad (18b)$$

$$\text{단, } S_1 = -\cosh(\tilde{\kappa}_g^l) B_g^l + \cosh(\tilde{\kappa}_g^r) B_g^r - (C_{0g}^l - C_{0g}^r) \\ - (C_{1g}^l + C_{1g}^r) - (C_{2g}^l - C_{2g}^r) - (C_{3g}^l + C_{3g}^r) - (C_{4g}^l - C_{4g}^r)$$

$$S_2 = -\beta_g^l \tilde{\kappa}_g^l \sinh(\tilde{\kappa}_g^l) B_g^l - \beta_g^r \tilde{\kappa}_g^r \sinh(\tilde{\kappa}_g^r) B_g^r - (\beta_g^l C_{1g}^l - \beta_g^r C_{1g}^r) \\ - 3(\beta_g^l C_{2g}^l + \beta_g^r C_{2g}^r) - 6(\beta_g^l C_{3g}^l - \beta_g^r C_{3g}^r) - 10(\beta_g^l C_{4g}^l + \beta_g^r C_{4g}^r)$$

이렇게 구해진 중성자속 $\phi_g^s(u)$ 로부터 4차 다항식으로 근사된 우변의 유효 선원항 $\tilde{Q}_{eg}^s(u)$ 을 갱신해야 한다. 이를 위하여 다음과 같은 방법으로 4차 다항식으로 투영된 중성자속 $\tilde{\phi}_g^s(u)$ 을 구한다.

$$\int_{-\frac{a^s}{2}}^{+\frac{a^s}{2}} P_n\left(\frac{2u}{a^s}\right) [\phi_g^s(u) - \tilde{\phi}_g^s(u)] du = 0 \quad (n = 0, 1, 2, 3, 4) \quad (19)$$

$$\text{단,} \quad \tilde{\phi}_g^s(u) = \sum_{i=0}^4 \tilde{C}_{ig}^s P_i\left(\frac{2u}{a^s}\right)$$

이때 구해진 전개계수 \tilde{C}_{ig}^s 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{0g}^s &= C_{0g}^s + \frac{\sinh(\tilde{\kappa}_g^s)}{\tilde{\kappa}_g^s} B_g^s \\ \tilde{C}_{1g}^s &= C_{1g}^s + \frac{3[\tilde{\kappa}_g^s \cosh(\tilde{\kappa}_g^s) - \sinh(\tilde{\kappa}_g^s)]}{(\tilde{\kappa}_g^s)^2} A_g^s \\ \tilde{C}_{2g}^s &= C_{2g}^s + \frac{5\{[3 + (\tilde{\kappa}_g^s)^2] \sinh(\tilde{\kappa}_g^s) - 3\tilde{\kappa}_g^s \cosh(\tilde{\kappa}_g^s)\}}{(\tilde{\kappa}_g^s)^3} B_g^s \\ \tilde{C}_{3g}^s &= C_{3g}^s + \frac{7\{\tilde{\kappa}_g^s [15 + (\tilde{\kappa}_g^s)^2] \cosh(\tilde{\kappa}_g^s) - [15 + 6(\tilde{\kappa}_g^s)^2] \sinh(\tilde{\kappa}_g^s)\}}{(\tilde{\kappa}_g^s)^4} A_g^s \\ \tilde{C}_{4g}^s &= C_{4g}^s + \frac{9\{[105 + 45(\tilde{\kappa}_g^s)^2 + 45(\tilde{\kappa}_g^s)^4] \sinh(\tilde{\kappa}_g^s) - \tilde{\kappa}_g^s [105 + 10(\tilde{\kappa}_g^s)^2] \cosh(\tilde{\kappa}_g^s)\}}{(\tilde{\kappa}_g^s)^5} B_g^s \end{aligned}$$

한편 \tilde{Q}_{eig}^s 는 \tilde{C}_{ig}^s 를 이용하여 다음과 같이 갱신할 수 있다.

$$\tilde{Q}_{eig}^s = \chi_g \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'}^s \tilde{C}_{ig'}^s + \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \Sigma_{sg \leftarrow g'}^s \tilde{C}_{ig'}^s + Q_{ig}^s - L_{ig}^s$$

3. 수치해석 결과 및 논의

다음과 <그림 1>과 같은 1차원 두 노드 문제를 이용하여 앞 절에서 살펴본 UNM과 SANM의 성능을 비교하였다. 우선 2군과 8군으로 주어진 단면적에 대해 노드당 1000개의 격자를 갖는 미세격자 유한차분법으로 기준해를 구하였다. 이때 구해진 유효증배계수와 각 노드별 평균 중성자속을 제한 조건으로 하여 UNM과 SANM에 의한 중성자속 분포를 구하고 노드 경계면($x=20$)에서의 중성자속과 중성자류를 구하였다. 이렇게 구해진 노드 경계면에서의 중성자속과 중성자류의 정확성과 전산시간을 비교하여 두 노달법의 성능을 비교하였다. <그림 2>는 미세격자 유한차분법에 의한 2군 및 8군 문제의 기준해를 보여준다.



그림 1. 1차원 두 노드 문제

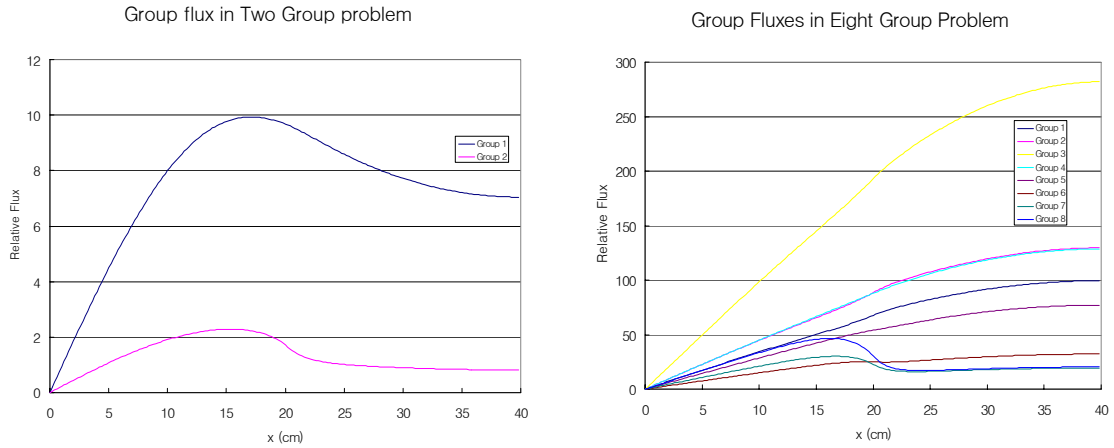


그림 2. 미세격자 유한차분법에 의한 기준해

2군 문제의 경우 2군 문제에 알맞게 구현된 2군 UNM Solver와 다군 문제를 취급 할 수 있도록 구현된 다군 UNM Solver 그리고 다군 SANM Solver를 비교하였다. <표 2>는 2군 문제에 대한 각 방법 별 결과를 비교한 것이다. UNM에서 NEM은 식 (11)에 의해 반응행렬을 구한 것이고 Exact ANM은 행렬 A의 고유치를 직접 구하고 식 (12)를 정확히 계산하여 반응행렬을 구한 것이며 Approx. ANM은 식 (14)를 이용하여 반응행렬을 근사적으로 구한 것이다. 한편 SANM은 유효 선원항을 2차와 4차로 전개하는 두 가지 방법을 비교하였다. 2군 UNM Solver와 다군 UNM Solver는 수학적으로는 동일하나 단지 전산프로그램의 구현상의 차이가 있는 것뿐이므로 같은 해를 얻으나 전산시간 면에서는 2군 Solver가 다군 Solver에 비해 좀 더 효율적인 것을 볼 수 있다. UNM/NEM의 경우 매우 큰 오차를 보이고 있으나 UNM/ANM이나 SANM은 매우 정확한 결과를 보인다. 그러나 전산시간 면에서는 4차 유효 선원항을 이용한 SANM의 경우 근사적 UNM/ANM에 비해 10배 이상의 전산시간이 소요됨을 알 수 있다. 이것은 해가 수렴하기 위해서는 많은 수의 선원항 반복이 필요하기 때문이다. <표 2>에서 괄호 안의 수는 선원항 반복계산 횟수를 나타낸다.

<표 3>은 8군 문제에 대한 각 방법 별 결과를 비교한 것이다. UNM/NEM의 경우 가장 큰 오차를 보였으며 2차 유효 선원항을 이용한 SANM의 경우도 매우 큰 오차를 보였다. 그러나 4차 유효 선원항을 이용한 SANM과 근사적 UNM/ANM의 경우 매우 정확한 결과를 보이고 있다. 전산시간 면에서는 4차 유효 선원항을 이용

한 SANM이 근사적 UNM/ANM에 비해 약 3.5배 많은 전산시간이 요구된다.

표 2. 2군 문제에 대한 UNM과 SANM의 결과 비교

		FDM (Reference)		UNM						SANM			
				NEM		Exact ANM		Approx. ANM		Quadratic Source		Quartic Source	
		ϕ_g	J_g	ϕ_g Error	J_g Error	ϕ_g Error	J_g Error	ϕ_g Error	J_g Error	ϕ_g Error	J_g Error	ϕ_g Error	J_g Error
2G Solver	g=1	Not Implemented		0.21	13.23	0.00	0.00	-0.01	-0.14	Not Implemented		Not Implemented	
	g=2			2.72	-12.41	0.00	0.00	0.00	0.16				
	CPU			4.9 μ sec		11.6 μ sec		6.9 μ sec					
MG Solver	g=1	9.685	0.2169	0.21	13.23	Not Implemented		-0.01	-0.14	-0.14	-0.05	0.00	0.09
	g=2	1.725	0.1273	2.72	-12.41			0.00	0.16	0.17	-0.71	0.06	-0.08
	CPU	0.23 sec		8.1 μ sec				12.7 μ sec		106.5 μ sec (18)		144.5 μ sec (19)	

<표 3> 2군 문제에 대한 UNM과 SANM의 결과 비교

		FDM (Reference)		UNM						SANM			
				NEM		Exact ANM		Approx. ANM		Quadratic Source		Quartic Source	
		ϕ_g	J_g	ϕ_g Error	J_g Error	ϕ_g Error	J_g Error	ϕ_g Error	J_g Error	ϕ_g Error	J_g Error	ϕ_g Error	J_g Error
MG Solver	g=1	1.326	-0.233	-0.46	-5.70	Not Implemented		-0.01	0.09	0.07	2.53	0.02	0.23
	g=2	1.736	-0.225	-0.51	-6.61			0.01	0.11	0.06	2.69	0.02	0.25
	g=3	3.780	-0.243	-0.33	-2.68			0.02	0.03	0.14	3.43	0.02	0.16
	g=4	1.722	-0.063	-0.17	1.77			0.00	-0.03	0.23	5.30	0.02	0.09
	g=5	1.059	-0.026	-0.14	6.65			0.05	-0.01	0.23	3.51	0.01	-0.23
	g=6	0.492	0.010	-0.06	-32.60			0.00	0.13	0.22	5.89	0.00	0.56
	g=7	0.448	0.060	4.23	-14.22			-0.09	0.02	0.25	12.97	-0.21	0.84
	g=8	0.600	0.067	7.86	-15.80			-0.31	0.56	0.52	12.57	-0.29	0.70
	CPU	5.48 sec		92.3 μ sec				208.4 μ sec		502.4 μ sec (21)		688.8 μ sec (22)	

8군 문제의 경우 SANM이 근사적 UNM/ANM에 비해 여전히 많은 전산시간이 요구되고 있으나 그 차이가 2군 문제의 경우에 비해 줄었다. 이러한 현상은 계산 도중에 $G \times G$ 행렬을 취급해야하는 UNM의 특성상 군수가 증가할수록 전산시간이 급격히 증가하는 것에 기인한다. 이것은 에너지 군수가 적을수록 UNM이, 군수가 많을수록 SANM이 전산 시간 면에서 유리함을 의미하는 것으로 두 방법은 상호 보완적으로 사용될 수 있을 것이다. 한편 본 논문에서는 비교되지 않았지만 SANM으로 실제 다차원 노심 계산 시 각 노드별 1차원 중성자속 해를 저장하여 다음 1차원 두 노드 계산 시 초기 값으로 사용하는 방법을 생각할 수 있다. 이 방법은 좋은 초기 값으로부터 시작하면 반복 계산 횟수를 줄일 수 있는 반복 계산법의 특성상

전산시간을 줄이는 데 기여를 할 것으로 기대된다. 이 방법은 각 노드별 1차원 중성자속을 저장해야 하므로 메모리를 많이 요구하는 단점이 있으나 요즘의 전산환경에서는 메모리 용량이 크게 문제가 되지는 않으므로 유용한 방법이라 할 수 있다.

4. 결론

직접해법인 UNM과 선원항 반복법인 SANM을 2군과 8군 1차원 두 노드 문제에 대해 각각 비교하였다. 그 결과 UNM/NEM은 두 문제 모두에서 매우 큰 오차를 보였고 2차 유효선원항을 이용한 SANM은 2군에서는 만족할 만한 정확도를 보였으나 8군 문제에서는 매우 큰 오차를 보였다. 반면 근사적 UNM/ANM과 4차 유효선원항을 이용한 SANM은 두 문제 모두에서 매우 정확한 결과를 얻었다. 전산시간 면에서는 8군 까지는 UNM/ANM이 훨씬 유리했으나 더 많은 군수에 대해서는 SANM이 유리해 질 것으로 예상된다. 이는 근사적 UNM/ANM과 SANM이 서로 보완적으로 사용될 수 있음을 의미한다.

참고 문헌

1. K. S. Smith, "Nodal Method Storage Reduction by Nonlinear Iteration," *Trans. Am. Nucl. Soc.*, **44**, 265 (1983).
2. K. S. Smith, and J. T. Cronin, "SIMULATE-3 Methodology," Studsvik report STUDSVIK/SOA-92/02 (1992).
3. R. M. Al-Chalabi, F. X. Turinsky, H. N. Faure, H. N. Sarsour, and P. R. Engrand, "NESTLE : A Nodal Kinetics Code," *Trans. Am. Nucl. Soc.*, **68**, 432 (1993).
4. H. G. Joo, D. Barber, G. Jiang, T. Downar, "PARCS : A Multi-Dimensional Two-Group Reactor Kinetics Code Based on the Nonlinear Analytic Nodal Method," PU/NE-98-26, Purdue University, September 1998.
5. K.S. Smith, "Spatial Homogenization Methods for Light Water Reactor Analysis," Ph.D Thesis, MIT (1980)
6. Hyun Chul Lee and Chang Hyo Kim, "Unified Formulation of NEM and ANM Solutions to Two Group Diffusion Equations," *Nucl. Sci. Eng.*, **138**, 192, (2001).
7. Hyun Chul Lee, "Unified Nodal Method for Static and Transient Analysis of Power Reactor," PhD Thesis, Seoul National University, Seoul Korea (2001)
8. R. A. Shober, "A Nodal Method for Fast Reactor Analysis," *proc. Computational Methods in Nuclear Engineering*. ANS, Williamsburg, 1979.
9. J. M. Noh, L. Pogosebkyan, Y. J. Kim, H. K. Joo, "A General Approach to Multigroup Extension of the Analytic Function Expansion Nodal Method Based on Matrix Function Theory," *Proc. Joint Intl. Conf. on Mathematical Methods and Supercomputing for Nuclear Applications*, Saratoga Springs, New York, October 5-9, 1997, Vol 1, p 144, American Nuclear Society(1997).