2004 춘계학술발표회 논문집
한국원자력학회

자유 상승하는 편구형 기포의 나선 운동

Spiraling Motion of a Free Rising Oblate Spheroid Bubble

이재영, 안형균
한동대학교
경북 포항시 북구 흥해읍

요 약

본 논문은 균일 유동장에서의 자유 상승하는 편구형 기포의 나선 운동에 대한 해석적 연구를 기술하였다. 편구형 좌표계에서 특정 크기의 편구형 기포 주위의 포텐셜로부터 얻은 Saffman의 운동 방정식에서 실험으로 관측된 기포의 상승속도 자료로부터 기포의 나선 운동의 특징을 나타내는 관계식을 유도하였다. 주요 지수로 무차원수인 스파이럴수, $S_P = \Omega R_w / U_b$, 가 기포의 등가 반경의 함수임을 보였고, 나선 운동의 발생 조건을 스파이럴수로 표현될 수 있음을 보였다.

ABSTRACT

This paper reports the analytical study on the spiral motion of the oblate spheroidal bubble rising in the uniform flow. In the oblate spherical coordinate, the potential flow theory produces the equation of motion derivied by Saffman. The charactericsics of the spiral motion is extracted from the equation of motion. As a nondimensional number, the spiral number, $S_P = \Omega R_w / U_b$, was correlated by the equivalent bubble radius. Also, the occurrence of the spiral motion is conditioned by the Spiral number.

Key words
Oblate spherical bubble, spiral motion, Spiral number, two-phase flow

1. 서 론

단일 기포의 생성과 움직임은 이상 유체 이해에 출발점이다. 이 분야에 대한 많은 연구가 지난 수십년간 수행되어 왔지만, 아직도 다수 기포의 평균적 거동의 이해 못지 않게

이해가 충분치 않다. 특히 기포의 경계면 운동량 전달의 경우, Drag 힘, Virtual Mass 힘, Basset 힘등의 정의와 Mechanical Formulation이 공학적 이용의 범위에는 적용성을 확보하고 있으나, 여전히 많은 불확실성이 존재한다. 고체 운동체의 항력을 일반화한 Ishii(1975, 1977)의 모델이나 Lahey Jr(1990)가 Cell의 포텐셜 해석을 통해 유도한 10여개 항의 항력들이 제시되고 있다. 뿐만 아니라 수직 상향 기포류 유동의 경우, Serizawa(1974)의 선구적인 벽면 근처의 기포류 밀집 현상을 설명하기 위한 방법으로 제시되어 온 양력과 Wall 힘(Antal, 1991)의 경우도 Tomyama(1999)의 실험이 보여주듯이 완전 구체의 기포가 아닌 경우 힘의 작용 방향조차 달라지는 불확실성이 존재한다.

이러한 불확실성에도 불구하고, 유동조건에 따라 결정한 계수를 제시된 물리적 모델에 장착하여, 공학적 문제와 설계에 사용함은 부분적으로 합리성을 갖는다. 그러나 아직도 좀더 정확한 물리적 이해와 간과된 중요한 힘의 발굴은 이 분야의 연구자에게 부여된 중요한 연구주제이다.

물론 완전 구형 기포의 존재 영역이 유동지도에서 비교적 광범위 하나, 기포의 모양이 편구형으로 변형함에 따라, 경계면의 운동량 전달은 매우 다른 양상을 띄게 된다. 심지어 기포의 자유상승 속도마저 기포 크기에 영향을 받고, 기포가 편구형으로 변함에 따라서 지그재그 형태나 나선 형태의 운동을 한다. 이 경우 그 경로와 자이로 반경, 자이로 주파수 등에 대한 정밀한 연구가 되어 있지 않고, 일부 실험적 보고가 존재할 뿐이다. 특히 기포의 양력을 고려한다면, Lahey의 공식은 이러한 나선 운동의 영향을 고려할 수 없다. 이는 결국 기포의 형태에 따른 운동의 특징을 제대로 묘사하는 노력이 매우 필요하고 중요함을 시사한다.

편구형 기포의 운동에 대한 선구적 연구는 Lamb(1932)의 편구형 운동체의 포텐셜 유동장의 공식에서 출발하여 수행된 Saffman(1956)의 연구이다. Saffman은 편구형 기포(Oblate Spheroidal Bubble)의 운동을 묘사하는 방정식을 유도하고, 기포의 상승속도를 예측하는 모델을 완성하고자 하였다. 그러나 그의 시도는 실험치와 많이 이적되어, Saffman은 자신의 공식에 기포 주변에 발생하는 웨이크의 존재에 의한 영향을 보정한 뒤에 실험치에 근사한 결과가 됨을 보였다. 그러나 기포 상승 속도에 대한 Saffman의 복잡한 물리적 공식은 공학적으로 사용하기에는 너무 복잡하다.

본 연구는 Saffman의 편구형 기포 운동 방정식을 토대로 하여, Saffman이 궁극적으로 추구한 기포 상승속도의 예측과 견해를 달리하여 더 중요한 물리적 이해를 얻고자 수행되었다. 현재 가장 신뢰할 수 있는 기포 거동의 데이터인 기포 상승 속도를 정밀한 데이터로 받아들여 방정식에 도입하고, 나머지 변수의 물리적 의미를 추정하였다. 나머지 변수는 편구형 기포가 나선(Spiral)운동을 할 때 그 운동 반경과 회전 빈도가 된다. 이를 통해 새로운 나선운동을 설명하는 무차원 변수를 다음과 같이 정의하고자 한다.

$$S_P = \frac{\Omega R_w}{U_b} \qquad (1)$$

위에서 S_P 는 Spiral 수, Ω 는 회전 속도, R_w 는 회전 반경, U_b 는 기포 상승속도로써 이 변수들은 편구형 기포의 형상의 함수가 될 것이다.

$$S_P = f\left(R_b, R_e, \chi\right) \quad (2)$$

위에서 R_b 는 기포의 등가 반경, R_e 는 레이놀즈수, χ 는 기포의 기울어진 각도를 의미한다. 본 연구는 이러한 아이디어를 갖고 Saffman에 의해 도출된 운동 방정식으로부터 나선 운동의 관계식 도출을 목표로 수행되었다. 이를 위해 제2장에서는 편구형 좌표계에서의 포텐셜 장에 대해 논의하였고, 제3장에서는 편구형 기포의 운동 방정식을 유도하였다. 제4장에서는 기포 상승속도를 이용한 Spiral수의 관계식 유도를 위한 분석 작업의 결과에 대한 토의와 관계식을 제시하고 있다.

2 포텐셜 유동 (Potential Flow)

2.1 편구형 기포 좌표계 설정

상승하는 기포의 크기와 운동 조건에 따라 완선 구형에서 타원형, 캡버블 형태까지 다양한 모습을 띈다. 보통 기포 크기가 작은 경우 완전 구형을 이루고, 이는 상승 속도가 작으며 수직 직선 상승을 한다. 그러나 기포가 커지면 모양은 타원체로 변하며 자유 상승시 나선 운동(Spiral Motion)이나 지그재그 운동(Zig-Zag Motion)을 한다. 이러한 기포의 형태를 표방하는 무차원수는 프라우드수의 역수, $2gR_b/U_b^2$, 와 웨버수, $2\rho R_b U_b^2/\sigma$, 이다. 이것들이 모두 1보다 작으면 구형기포이고, 그렇지 않으면 타원형 기포를 관측하게 된다.

본 연구에서는 편구형 기포를 모델하기 위해서 우선 좌표계 설정과 이에 따른 라프라시안을 정의하여 기포 주변의 유동 포텐셜을 정의하고자 한다. 그림 1에 나타난 바와 같이 편구형 좌표계는 (μ, ζ, ω)로, 직교 좌표계 (x, y, z)와의 좌표 변환 규칙을 필요로 한다. Lamb(1932)에 나타난 바와 같이 편구형 좌표계는

$$x = k\cos\theta\sinh\eta = k\mu\zeta \quad (3)$$

$$y = k(1-\mu^2)^{1/2}(1+\zeta^2)^{1/2}\cos\omega \quad (4)$$

$$z = k(1-\mu^2)^{1/2}(1+\zeta^2)^{1/2}\sin\omega \quad (5)$$

로 표현되고, 이는 운동 중심축에서 R_w 만큼의 반경으로 떨어진 편구형 기포가 Ω 의 각속도로 운동하는 상황을 의미한다. 또한, 이 편구형 기포는 χ 각도 만큼 궤도에서 기울기를 갖고 있다고 가정한다.

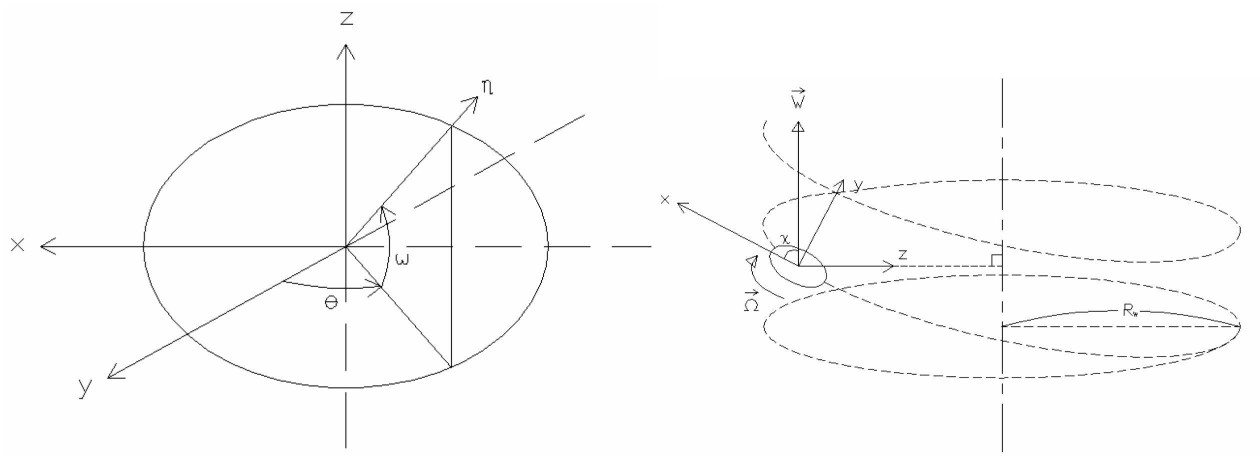

그림 1. 편구형 기포의 좌표계와 나선 운동하는 상승 기포의 모델링

이러한 좌표계에서, 미분 벡터 연산자를 구하기 위한 척도와 단위 벡터를 정의한 것을 표 1에 나타내었다.

표 1. 편구형 좌표계의 척도 요소와 단위 벡터

	척도 요소	단위 벡터
$\vec{h}_\mu = \partial \vec{r} / \partial\mu$	$H_\mu = \sqrt{\vec{h}_\mu \cdot \vec{h}_\mu}$	$\vec{e}_\mu = \vec{h}_\mu / \sqrt{\vec{h}_\mu \cdot \vec{h}_\mu} = \vec{h}_\mu / H_\mu$
$\vec{h}_\zeta = \partial \vec{r} / \partial\zeta$	$H_\zeta = \sqrt{\vec{h}_\zeta \cdot \vec{h}_\zeta}$	$\vec{e}_\zeta = \vec{h}_\zeta / \sqrt{\vec{h}_\zeta \cdot \vec{h}_\zeta} = \vec{h}_\zeta / H_\zeta$
$\vec{h}_\omega = \partial \vec{r} / \partial\omega$	$H_\omega = \sqrt{\vec{h}_\omega \cdot \vec{h}_\omega}$	$\vec{e}_\omega = \vec{h}_\omega / \sqrt{\vec{h}_\omega \cdot \vec{h}_\omega} = \vec{h}_\omega / H_\omega$

(참고 $\vec{r} = (x, y, z)$)

2.2 편구형 좌표계의 유동 포텐셜과 속도장 계산

편구형 기포 주변의 유체가 비압축성, 비점성이라고 가정하고 포텐셜을 계산하고자 한다. 물론 이런 가정이 전통적인 D’Alembert Paradox를 항력 계산에 주고 있으나, 본 연구에서는 기포의 나선 운동 계산이 목적이므로 이 가정을 통해 결과를 기대할 수 있다.

표 1에 나타난 척도식을 대입하여 다음의 라플라스 방정식을 풀어야 한다.

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (6)$$

르장드르 다항식의 해를 3차까지 고려하여 구하면 Φ는 다음과 같이 나타난다.

$$\Phi = -k\mu(1+\zeta^2)(1-\zeta\cot^{-1}\zeta)(U_b\cos\chi + \Omega R_w \sin\chi)Z^{-1}$$
$$-kZY\zeta(1+\zeta^2)^{-1/2}(U_b\sin\chi - \Omega R_w\cos\chi)(1-\mu^2)^{1/2}\cos\omega$$
$$+\Omega k^2\sin\chi(1+\zeta^2)^{1/2}(X-\zeta)\mu(1-\mu^2)^{1/2}\sin\omega \tag{7}$$

위에서

$$X = \zeta + \frac{3\zeta\cot^{-1}\zeta - 3 + (1+\zeta^2)^{-1}}{(6\zeta^2+3)\cot^{-1}\zeta - 6\zeta - \zeta(1+\zeta^2)^{-1}}$$
$$Y = \left\{2+\zeta^2 - \zeta(1+\zeta^2)\cot^{-1}\zeta\right\}^{-1}$$
$$Z = (1+\zeta^2)\left\{(1+\zeta^2)\cot^{-1}\zeta - \zeta\right\}$$

이다. 이 해는 경계조건을 만족시켜야 한다. 기포의 표면은 점착조건(No Slip Condition)에 의해 모든 속도 요소가 0 이어야 한다. 이를 위해서는 상승하며 나선 운동을 하는 기포의 운동과 이 기포 중심에서 정의된 포텐셜의 구배가 주는 속도가 중첩(Superpose)된 일반적인 속도식이 필요하다.

상승하는 기포 주변 유체에 유선의 속도는 $\vec{V} = \nabla\Phi - \vec{W} - \vec{\Omega}\times(\vec{R_w} + \vec{r})$ 이다. 일정한 반경 R_w 의 나선을 포함하는 원기둥을 고려하면 xy 평면은 이 원기둥의 축에 평행한 접면으로 나타난다. 원기둥의 수직축과 기포 진행방향인 대칭인 축 x 와의 각도는 χ 로 나타낼 수 있고, $\vec{U_b} = (U_b\cos\chi, U_b\sin\chi, 0)$, $\vec{\Omega} = (\Omega\cos\chi, \Omega\sin\chi, 0)$, $\vec{R_w} = (0,0,R_w)$, $\vec{r} = (x,y,z)$ 이다. 표면의 법선 $\vec{e_\zeta}$ 을 유체의 속도와 내적하면 0 이되는 조건을 도입하여 다음과 같이 속도 벡터를 구한다.

$$V_\mu = \frac{1}{H_\mu}\frac{\partial\Phi}{\partial\mu} - \{W\cos\chi + \Omega(z+R_w)\sin\chi\}\vec{e_x}\cdot\vec{e_\zeta}$$
$$-\{W\sin\chi - \Omega(z+R_w)\cos\chi\}\vec{e_y}\cdot\vec{e_\zeta} - \{\Omega y\cos\chi - \Omega x\sin\chi\}\vec{e_z}\cdot\vec{e_\zeta} \tag{8}$$

$$V_\omega = \frac{1}{H_\omega}\frac{\partial\Phi}{\partial\omega} - \{W\cos\chi + \Omega(z+R_w)\sin\chi\}\vec{e_x}\cdot\vec{e_\zeta}$$
$$-\{W\sin\chi - \Omega(z+R_w)\cos\chi\}\vec{e_y}\cdot\vec{e_\zeta} - \{\Omega y\cos\chi - \Omega x\sin\chi\}\vec{e_z}\cdot\vec{e_\zeta} \tag{9}$$

$$V_\zeta = \frac{1}{H_\zeta}\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} - \{W\cos\chi + \Omega(z+R_w)\sin\chi\}\vec{e_x}\cdot\vec{e_\zeta}$$
$$-\{W\sin\chi - \Omega(z+R_w)\cos\chi\}\vec{e_y}\cdot\vec{e_\zeta} - \{\Omega y\cos\chi - \Omega x\sin\chi\}\vec{e_z}\cdot\vec{e_\zeta} \tag{10}$$

이다. 위의 식을 이용하고 기포 형태가 나선 운동중에 변하지 않음을 고려하면 ζ 방향의

속도가 0 이므로 편구형 기포 주변의 속도장을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V_\mu = \Big\{ & -Z^{-1}(1+\zeta^2)(W\cos\chi + \Omega R_w \sin\chi)(1-\mu^2)^{1/2} \\ & + 2Y(1+\zeta^2)^{1/2}(W\sin\chi - \Omega R_w\cos\chi)\mu\cos\omega \\ & -\Omega k\sin\chi(1+\zeta^2)^{1/2}\left(-\zeta + (1-2\mu^2)(X-\zeta)\right)\sin\omega \Big\}(\mu^2+\zeta^2)^{-1/2} \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} V_\omega = {} & 2Y(W\sin\chi - \Omega R_w\cos\chi)\sin\omega - \Omega k\cos\chi(1+\zeta^2)^{1/2}(1-\mu^2)^{1/2} \\ & + \Omega k\sin\chi X\mu\cos\omega \end{aligned} \tag{12}$$

$$V_\zeta = 0 \tag{13}$$

3 편구형 기포의 운동 방정식

2장에서 계산된 속도장은 그 자체로 국지적 특성과 유선을 확인하는데 유용하다. 본 연구에서는 나선 운동의 특성 파악을 위해 베르누이 방정식을 이용해 유선상의 에너지 보존 관계를 세웠다.

3.1 베르누이 방정식

기포의 정체점에서의 속도와 압력은 정체점 주변 표면의 모양으로 인해 결정되고 기포 주변의 유체는 비압축성, 비점성 유동으로 유선을 나타낸다고 가정한다. 에너지가 보존됨을 고려하면 베르누이 방정식을 사용할 수 있다.

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + gH - \frac{1}{2}\Omega^2\varpi^2 = const. \tag{14}$$

베르누이 방정식은 유선에서 일정하므로 유체 표면 정체점 $(\mu_s, \zeta_0, \omega_s)$ 에 대해 미분하면 다음과 같이 0 의 값을 갖는다.

$$\left(\frac{\partial}{\partial\mu}, \frac{\partial}{\partial\omega}, \frac{\partial^2}{\partial\mu^2}, \frac{\partial^2}{\partial\mu\partial\omega}, \frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\right)\left(-\frac{1}{2}V^2 - gH + \frac{1}{2}\Omega^2\varpi^2 + \frac{\sigma}{\rho}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right) = 0 \tag{15}$$

제 2.1절에서 정의한 좌표계를 참조하면 나선 회전면으로부터 수직 거리 ϖ, 기포 중심 위의 수직 높이 H, 기포의 장축과 단축 역수의 합 $(1/R_1 + 1/R_2)$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$H = x\cos\chi + y\sin\chi \tag{16}$$

$$\varpi = \left\{(d+z)^2 + (x\sin\chi - y\cos\chi)^2\right\}^{1/2} \tag{17}$$

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{\zeta(\zeta^2+1)^{1/2}}{k(\zeta^2+\mu^2)^{3/2}}+\frac{\zeta}{k(\zeta^2+1)^{1/2}(\zeta^2+\mu^2)^{1/2}} \tag{18}$$

베르누이 방정식을 μ에 대해 미분한 것은 다음 식을 준다.

$$\begin{aligned}&-\frac{\sigma\zeta\mu(4\zeta^2+\mu^2+3)}{\rho k(\zeta^2+\mu^2)^{5/2}(\zeta^2+1)^{1/2}}-gk\zeta\cos\chi+gk\sin\chi(\zeta^2+1)^{1/2}\mu(1-\mu^2)^{-1/2}\cos\omega\\&-\Omega^2kd(\zeta^2+1)^{1/2}\mu(1-\mu^2)^{-1/2}\sin\omega+\Omega^2k^2\left\{\mu\zeta^2\sin^2\chi-\mu(\zeta^2+1)(\sin^2\omega+\cos^2\chi\cos^2\omega)\right.\\&\quad\left.+(2\mu^2-1)\zeta(\zeta^2+1)^{1/2}\sin\chi\cos\chi(1-\mu^2)^{-1/2}\cos\omega\right\}=0\end{aligned} \tag{19}$$

또한 ω에 대한 미분은 다음식을 준다.

$$\begin{aligned}&k(\zeta^2+1)^{1/2}(1-\mu^2)^{1/2}\left\{g\sin\chi\sin\omega+\Omega^2R_w\cos\omega+\Omega^2k\zeta\mu\sin\chi\cos\chi\sin\omega\right.\\&\quad\left.+\Omega^2k\sin\chi^2(\zeta^2+1)^{1/2}(1-\mu^2)^{1/2}\sin\omega\cos\omega\right\}=0\end{aligned} \tag{20}$$

나선 운동하는 기포의 형태는 변하지 않으므로 ζ가 일정하기 때문에 ζ 방향의 속도 V_ζ가 0이다. χ와 $(1-\mu^2)^{1/2}$가 나선의 각도와 같은 단위의 작은 값이므로 두 항의 곱을 무시하면 μ방향 속도가 식 (11)에서 0이라는 조건식은 다음과 같이 된다.

$$U_bZ^{-1}(1+\zeta^2)^{1/2}(1-\mu^2)^{1/2}+2Y\cos\omega(U_b\chi-\Omega R_w)-\Omega k\chi\sin\omega=0 \tag{21}$$

또한 식 (12) $V_\omega=0$은 다음과 같이 간략화된다.

$$-\Omega k(1+\zeta^2)^{1/2}(1-\mu^2)^{1/2}+2Y\sin\omega(U_b\chi-\Omega R_w)+\Omega kX\chi\cos\omega=0 \tag{22}$$

식 (19)은 다음과 같다.

$$\left\{\frac{4\sigma\zeta}{\rho gk^2(\zeta^2+1)^2}+\zeta+\frac{\Omega^2k}{g}(\zeta^2+1)\right\}\left(\frac{1-\mu^2}{1+\zeta^2}\right)^{1/2}+\frac{\Omega^2R_w}{g}\sin\omega-\left(1+\frac{\Omega^2k\zeta}{g}\right)\chi\cos\omega=0 \tag{23}$$

또한 식 (20)은 다음과 같이 간략화된다.

$$\left(1+\frac{\Omega^2k\zeta}{g}\right)\chi\sin\omega+\frac{\Omega^2R_w}{g}\cos\omega=0 \tag{24}$$

위의 네 식, 식 (21)~식 (24), 을 이용하여 나선의 각도와 같은 단위인 $\Omega^2 k\zeta / g$ 와 $\Omega^2 k^2 / U_b^2$, $kgZ\chi/\Omega R_w U_b$ 가 작다는 점을 고려하여 정리하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$2Y\left(U_b - \frac{\Omega R_w}{\chi}\right)\frac{\Omega R_w}{\chi} = kgX \tag{25}$$

$$\frac{U_b}{Z}(\zeta^2+1) = \frac{gkX\chi}{\Omega R_w}\left(\frac{4\sigma\zeta}{\rho g k^2(\zeta^2+1)^2} + \zeta\right) \tag{26}$$

이제 이상의 두 식에 기포 상승 속도 외적식을 도입하기 위해 베르누이 방정식을 $\partial^2/\partial\mu^2$ 에 대해 미분하여 이것이 0 임을 이용한 식을 구해 상기와 같이 단순화하면 다음 식을 얻는다.

$$\frac{U_b{}^2}{gk} = \frac{Z^2}{\zeta^2+1}\left(\frac{4\sigma\zeta}{\rho g k^2(\zeta^2+1)^2} + \zeta\right) \tag{27}$$

3개의 방정식 식 (25)~식 (27), 에는 다섯개의 미지수 $U_b, \Omega, R_w, \zeta, \chi$ 가 있다. 식 (26)에 식 (27)을 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\Omega R_w}{U_b \chi} = \frac{X}{Z} \tag{28}$$

또한 이러한 관계식은 식 (25)에 대입하면 다음의 식을 얻는다.

$$\frac{4\sigma}{\rho g k^2(\zeta^2+1)^2} = \frac{\zeta^2+1}{2Y\zeta(Z-X)} - 1 \tag{29}$$

3.2 웨이크 영향 보정

위에서 얻은 3개의 방정식 식 (27)~식 (29)을 통해 반지름 R_b 과 ζ 와의 관계를 알고 있으므로 (29)식을 이용하면 기포의 평균 반지름과 기포의 형태 관계를 알 수 있다. (28)식은 상승 속도와 각속도, 각도 χ 간의 관계를 나타낸다. (27)식은 상승 속도에 대한 항이 들어있으므로 반지름과 상승속도와의 관계를 알려 준다.

Saffman은 이것을 이용하여 기포 상승 속도를 정밀하게 예측할 수 있다고 생각했으나 방정식의 정교함에 비해 현상을 충분히 설명하지 못했다. 그 이유는 기포의 나선 운동을 너무 정형화 했기 때문이다. 그러나 그는 실험치를 만족하기 위해 웨이크 모델에 의한 보정을 시도했다. 웨이크(Wake)에 대한 항 K 로 보정하여 식 (27), 식 (28), 식 (29)를 수정하면 다음과 같다.

$$\frac{U_b{}^2}{gk} = \frac{KZ^2}{\zeta^2+1}\left(\frac{4\sigma\zeta}{\rho g k^2(\zeta^2+1)^2} + \zeta\right) \tag{30}$$

$$\frac{\Omega R_w}{U_b \chi} = \frac{X}{KZ} \tag{31}$$

$$\frac{4\sigma}{\rho g k^2 (\zeta^2 + 1)^2} = \frac{\zeta^2 + 1}{2Y\zeta(Z - X / K)} - 1 \tag{32}$$

웨이크 영향을 고려한 식 (32)를 이용하여 기포 평균 반지름과 기포의 형태 관계를 알 수 있다. 식 (32)에 $\sigma/\rho = 74 cm^3 / \sec^2$, $g = 981 cm / \sec^2$ 를 대입하면 속도와 반지름과의 관계가 나타난다. ζ 는 R_b 에 대해 증가하는 영역과 감소하는 영역이 존재한다. 이 때 증가하는 영역을 ζ 값으로 취하게 되면 식 (31)이 음수 값을 갖게 되므로 물리적으로 의미를 잃게 된다. 그러므로 ζ 는 R_b 에 대해 증가하는 함수 값이다. 웨이크를 고려한 형상 요소(Shape Factor) ζ 를 ζ_w 라 하고, 웨이크를 고려하지 않은 형상 요소를 ζ_n 로 고려한다.

3.3 나선 운동 분석을 위한 새로운 해석

위에 도출된 식 (30), 식 (31), 식 (32)를 갖고 Saffman은 기포 상승속도를 예측하는데 주력했으나, 정성적 합리성만을 확인하였다. 오늘날 기포 상승 속도를 위의 3개의 방정식을 연립하여 해석하는 것은 일반적으로 받아 들여져 있지 않고, 오히려 파동이론 등 간단한 물리적 모델들이 사용되고 있다. 특히, 실험자료의 증대로 이를 토래도 얻어진 관계식이 매우 신뢰성을 갖고 있다. 본 연구에서는 Saffman의 방정식이 갖는 물리적으로 많은 정보를 활용하여 물리적 의미와 공학적 타당성을 증대하기위해 Saffman과 달리 기포 상승 속도에 대하여는 실험적 결과를 더 존중하고, 오히려 실험적 분석이 거의 되지 않은 기포 나선 운동에 대한 해석을 시도하였다. 즉, Saffman이 나선 운동 기포의 나선 반경과 회전수등을 가정하고 상승 속도를 계산한 것과는 반대로 오히려 상승 속도를 실험치로 넣고, 기포의 나선 운동 반경과 회전수와의 관계를 구하였고, 그 결과를 제4장에 나타내었다.

4 결과와 검토

3장에서 유도된 3개의 식은 4개의 미지수를 갖고 있다. 이번 장에서는 기포의 상승속도에 대한 실험치의 결과가 보여주는 기포의 등가 반경과의 관계를 활용하여, 기포의 나선 운동의 지배 인자를 도출하고자 한다. 먼저 그림 2에 나타난 바와 같이 기포 반경에 따른 상승 속도가 유체의 특성에 따라 다른 결과를 보임을 고려하여, 순수한 물(Pure Water)과 일반물(Tap Water)의 두 경우의 실험값을 방정식에 넣었다. 특징은 일반물의 경우 기포 반경이 $1mm$ 정도 될 때까지 상승 속도가 매우 크게 증가하지만 이후에는 오히려 감소한다는 것이다. 순수한 물에서는 이러한 양상은 다소 발견되나, 일반적인 용수의 경우에 비하면 매우 완화된 상태이다. 이러한 기포 상승 속도는 기포 반경과 레이놀즈 수의 변화에 비선형성을 그림 3에 나타내었다.

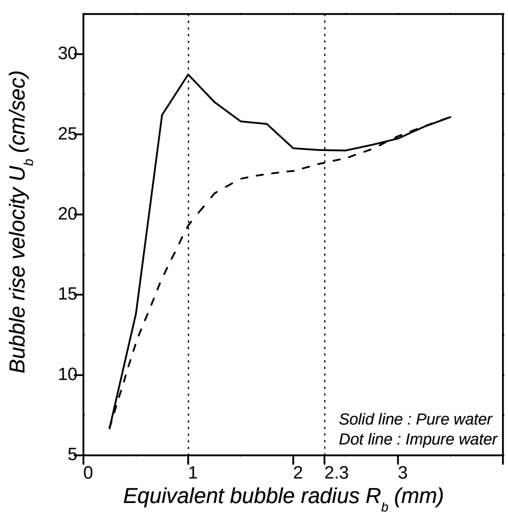

그림 2. 등가 반경과 상승 속도

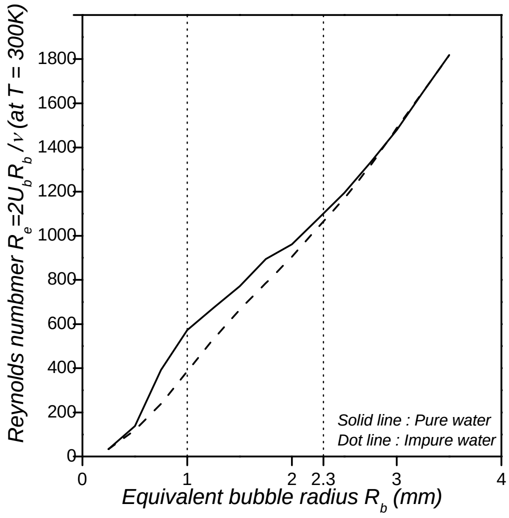

그림 3. 등가 반경과 레이놀즈 수

이러한 실험치에 대한 곡선을 지배 방정식에 대입하고, 계산값을 순수용수와 일반용수에 대하여 각기 적용하였다.

4.1 순수용수에서의 타원 기포의 나선 운동

3개의 식을 풀어 스파이럴수와 등가 기포 반경의 함수를 구하기 위한 계산을 수행하였다. 스파이럴수 S_p 는 기포의 각속도와 상승속도의 비율로 정의하여 식 (1)과 같이 나타내었다.

그림4에 나타난 바와 같이 스파이럴수는 기포 반경 $1mm$ 에서 최대치를 갖는 포물선형을 보이고 있다. 그림에서 두개의 선이 나타난 것은 하나는 원래의 유도식과 또 하나는 웨이크의 현상을 고려하여 보정한 경우를 비교하기 위함이다. 동그라미로 표현된 것은 웨이크를 고려치 않은 결과로써 네모로 표현된 웨이크를 고려한 경우 보다 대부분의 경우 큰 스파이럴수를 보여준다. 이는 웨이크가 나선 운동을 제한하는 요소로 작용할 수 있음을 의미한다. 여기서 나선 운동이 일어난다고 주장되는 등가 반지름인 $1mm$ 는 최대 스파이럴수 발생 조건에 해당하고, 스파이럴수의 감소가 이후 기포 반경이 커짐에 따라 진행되는 양태이다. 기포의 파쇄에 의한 영역 반경은 기포 반경 $2.3mm$ 에 해당하는데, 본 그림에서는 이곳이 변곡점에 해당한다.

그림 5를 보면 더욱 흥미있는 결과를 볼 수 있는데, 각속도를 기포 상승 속도로 도식한 것이다. 여기서 보면 역시 스파이럴수가 최대값에 해당하는 속도가 있고, 각속도가 수직으로 변하는 지역에 해당하는 기포 속도가 있는데, 이 부분에 해당하는 것이 최대 나선 운동의 반경인 $2.3mm$ 에 해당한다. 물리적으로는 기포의 반경이 커질수록 나선 운동에 에너지가 많이 소모되므로, 기포는 나선 운동의 크기와 규모를 줄이고 상승을 하거나, 자체 진동을 하는 것으로 볼 수 있다.

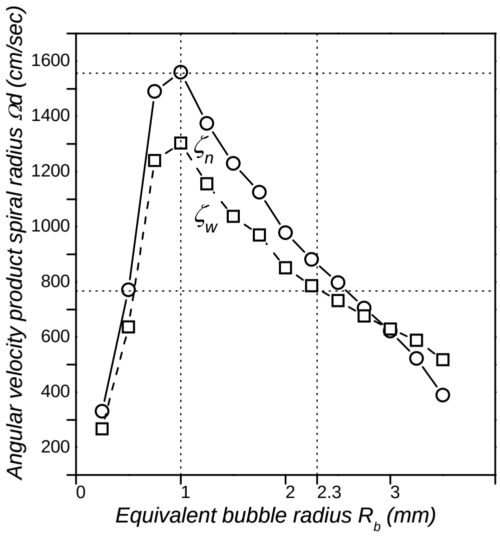

그림 4. 순수 용수에서 등가 반경과 회전수

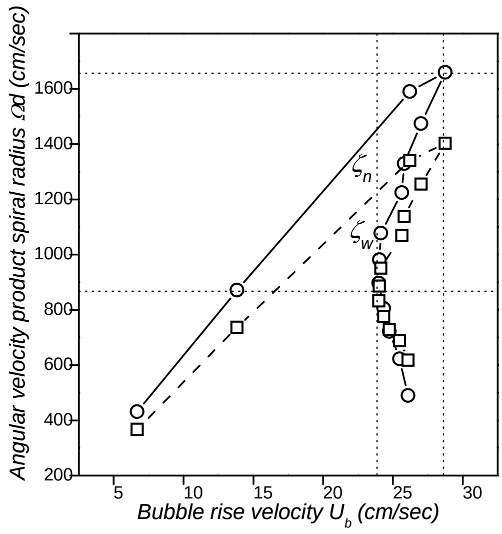

그림 5. 순수 용수에서 상승 속도와 회전수

4.2 일반용수에서의 타원 기포의 나선 운동

그림 6에 나타낸 바와 같이 각속도에 대한 기포 반경의 최대치는 기포가 다소 큰 영역에서 발생한다. 즉 1.2*mm* 정도이다. 이는 기포의 속도가 크게 변곡하는 1*mm* 영역의 변화가 선형적으로 반영되지 않은 결과이다. 또한 2.3*mm* 의 경우에도 어떤 기하학적 특징을 찾기 어렵다. 이는 실제 실험으로 검토한 사실인데, 일반용수의 경우 임계 웨버수, 즉 기포의 파괴등과 관련된 값이 연구자마다 다르게 보고되고 있어 이를 결정하는 것은 임계 웨버수에 대한 정밀한 연구 결과에 따라야 할 것이다.

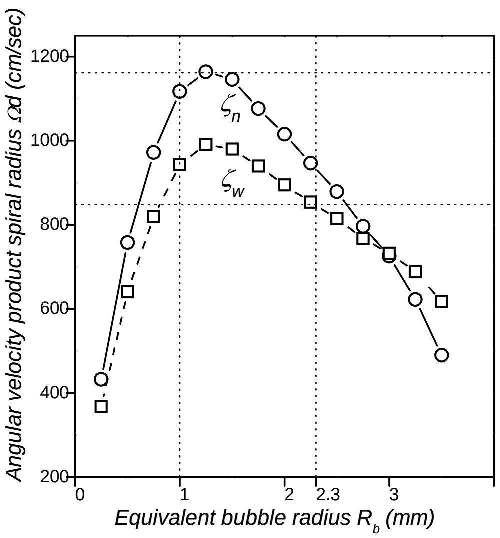

그림 6. 일반 용수에서 등가 반경과 회전수

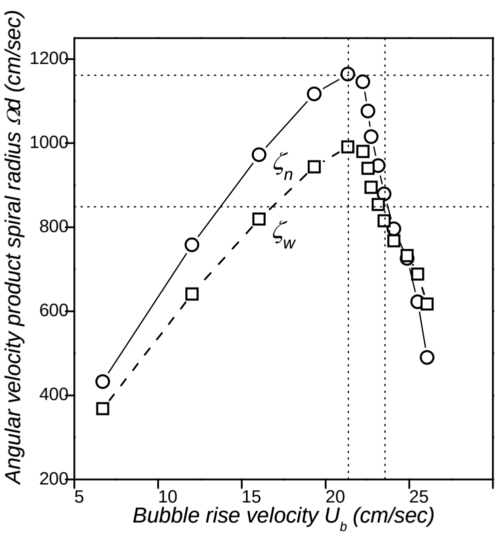

그림 7. 순수 용수에서 상승 속도와 회전수

따라서 본 연구에서는 기포 크기가 2.3*mm* 이상 될 때 기포 파괴가 일어난다면, 상기 유도한 식을 적용할 수 없으므로 이에서 나선 운동의 종료를 보아야 할 것이다.

반면 그림 7은 2.3*mm* 에 해당하는 상승 속도에서 변곡점이 보임을 미세하게 관찰할 수 있다. 모든 경우에 웨이크 효과는 나선 운동의 규모를 축소시키는 것으로 나타났다.

4.3 스파이럴수와 등가 반경의 관계

스파이럴수 S_p 를 등가 반경의 함수로 도식화 한 것은 그림 8과 같다. 식 (31)에 의하면 기포 상승속도는 스파이럴수에 영향을 주지 못하고 기포의 반경만의 함수이다. 기포 기울기는 중요한 변수이나 Saffman의 실험에서 거의 변하지 않는다고 보

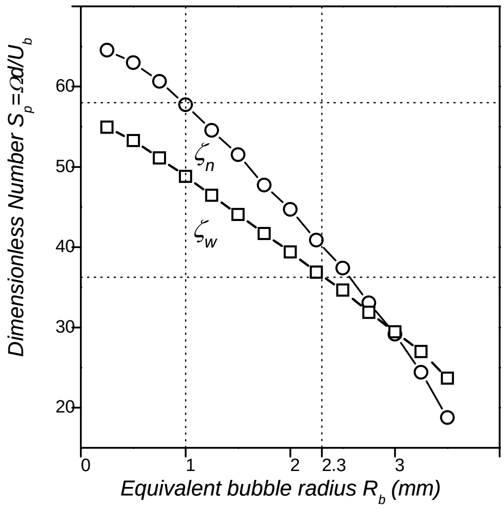

그림 8. 등가 반경과 스파이럴수

되어 있으므로, 이를 감안하면 스파이럴수는 그림 8에 나타난 바와 같이 단조 감소 함수를 보여준다. 즉, 기포 반경이 커질수록 스파이럴수가 감소한다. 물론 이 경우 스파이럴수가 명확히 나선 발현 시점을 보여주지 못하지만 상기 각속도에 대한 분석을 통해 스파이럴수로 나선 운동의 생성조건을 묘사할 방법이 생긴다. 즉,

$$\begin{cases} S_p > 60 & \text{직선 운동} \\ 40 < S_p < 60 & \text{나선 운동} \\ S_p < 40 & \text{붕괴로 인해 적용 불가} \end{cases}$$

의 조건을 도출할 수 있다.

5. 결론

본 연구는 편구형 기포가 자유 상승할 경우 보여주는 나선형 운동의 총특성인 나선 회전 반경과 회전 빈도의 기포 형상과의 관계를 도출하기 위해 수행되었다. 편구형 물체 주위의 유체 포텐셜 필드에 대한 공식에서 도출된 편구형 물체의 Saffman의 운동방정식에 대한 재해석을 수행하였다.

나선 운동의 특징을 정의하는 스파이럴수 $S_P = \Omega R_w / U_b$를 정의하고 이것을 기포의 등가 반경의 함수로 도출하며, 나선 운동에 대한 공학적 관계식 유도를 가능케 하였다. 또한 이를 통해 나선 운동의 발생영역의 관계를 보였다. 본 연구는 균질 유동장에서의 거동에 대한 새거으로 나선 운동에 대한 추후 연구가 필요하다.

용어설명

알파벳

- H : 기포 중심의 수직 높이, 척도 요소
- R : 기포 반경
- V : 속도
- S_P : Spiral 수
- U_b : 기포 상승 속도
- $\vec{e}$: 단위 벡터
- $\vec{h}$: 단위 접선 벡터
- g : 중력 가속도
- $\vec{r}$: 직교 좌표계에서 임의의 벡터

그리스어

- Φ : 유체 유동장의 포텐셜
- Ω : 회전 속도
- χ : 기포의 기울어진 각도
- ρ : 상온에서 물의 밀도
- σ : 기포와 물의 표면장력
- ϖ : 나선 회전면으로부터 수직 거리

아래첨자

- 1 : 장축 반지름
- 2 : 단축 반지름
- b : 기포 반지름
- n : 웨이크를 고려 하지 않은 형상 요소
- w : 나선 반지름, 웨이크를 고려한 형상 요소
- x : 직교 좌표계에서 x벡터

y : 직교 좌표계에서 y 벡터
z : 직교 좌표계에서 z 벡터
μ : 편구형 좌표계에서 μ 벡터
ω : 편구형 좌표계에서 ω 벡터
ζ : 편구형 좌표계에서 ζ 벡터

참고문헌

Ishii, M., 1977. One-dimensional drift-fulx model and constitutive equations for relative motion between phases in various two-phase flow regimes, ANL-77-471 ARGON NATIONAL LABORATORY

Ishii, M., 1975. Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flow. Eyrolles

Lahey, R. T., Jr, 1990. The analysis of phase separation and phase distribution phenomena using two-fluid model. Nuclear Engineering and Design, Vol 122(1990) 17-40

Saffman, P. G., 1956. On the rise of small air bubbles in water, J. Fluid Mech, 1, 249-275

Saffman, P. G. 1964. The lift on a small sphere in a slow shear flow, J. Fluid Mech, Vol 22, part 2. pp 385-400