2003 춘계학술발표회 논문집
한국원자력학회

붓스트랩 방법을 이용한 사용후핵연료 핵종량 비율 표본의 포함확률 보정

Application of Bootstrap Method for the Corrected Content of PWR Spent Fuel Isotopic Composition Ratio Sample

주준식, 신희성, 이윤희, 이주찬, 방경식, 김호동
한국원자력연구소
대전광역시 유성구 덕진동 150

요 약

보간법으로 개선된 붓스트랩 방법을 정규분포, 라플라스 분포 및 스튜던트 t 분포에 적용하여 포함확률을 보정하고 그에 대한 신뢰도를 구한 후, 검증을 위하여 기존 방법에서와 같이 참값과 비교하였다. 포함확률이 작은 경우에는 기존방법과 비슷하였으나, 포함확률이 큰 경우에는 보간법에 의해 예측된 신뢰도값이 기존방법에 비해서 참값에 더 접근하는 것으로 나타났다. 이 검증된 방법을 PWR 사용후핵연료에 속한 21개 핵종의 핵종량 계산값 대비 실험값 비율의 표본에 적용하여 75/90과 90/95 확률 및 신뢰도에서의 포함확률을 보정하였다. 그 결과, 대부분의 핵종에서 보정된 포함확률과 주어진 포함확률의 차이가 3~12 % 인 것으로 나타났다.

ABSTRACT

The bootstrap method improved with the interpolation technique is applied to normal, Laplace and Student t distributions in order to determine the corrected contents and their confidences, for the validation of the method, which are compared with the true values as well as the previous results. It seems that the results obtained from the improved bootstrap method are similar to the previous for the lower content. But it seems to be more consistent with the true than the previous is in the case of the higher content. This validated method is applied to the sample of the measured-to-calculated ratios of 21 isotopic compositions contained in PWR spent fuel under the conditions of 75/90 and 90/95 probabilities and confidences. It is revealed that the difference between the given and corrected contents is 3 ~ 12 % for the most part of 21 isotopes.

1. 서 론

사용후핵연료에 포함된 핵종들의 핵종량 표본을 기반으로 미래의 동일한 조건에서 얻어지는 핵종량의 포함구간 예측을 위하여 허용구간방법이 활용되고 있다. 이때 전통적인 방법에서는 표본의 모집단이 정규분포하는 것으로 가정하고 허용구간방법을 결정한다. 그러나 표본의

모집단이 정규분포하지 않을 경우, 전통적 방법에 의한 허용구간은 잘못된 결과를 유발시킬 수 있다. 이런 점에 착안하여 최근에 표본의 모집단분포에 종속적인 허용구간 결정방법이 활발히 연구되고 있다. Fernholz등[1]은 전통적인 허용구간방법을 붓스트랩기법을 이용하여 보정함으로써 모든 분포함수에 로버스트(robust)한 보정된 포함확률을 갖는 허용구간방법을 개발하였다. Fernholz[2]는 참고문헌[1]에서 제시한 방법이 분포함수에 로버스트할 뿐 아니라 이상치(outlier)에 대해서도 로버스트하다는 것을 보였다.

본 연구에서는 붓스트랩기법에 보간법을 가미하여 부분적인 개선을 하고, 이 방법을 세 개의 분포함수에 적용하여 포함확률과 그에 따른 신뢰도를 구한 후 참값과 비교을 통하여 이 방법을 검증하였다. 이를 바탕으로 이 방법을 사용후핵연료에 속한 21개 핵종의 핵종량 계산값 대비 실험값 비율의 표본에 적용하여 포함확률 값을 보정하였다.

2. 이론적 배경

가. 허용구간(tolerance intervals)[3-4]

허용구간은 모집단분포함수의 특정한 확률(비율)부분을 결정하는 경계값을 표본의 평균과 표준편차로 추정한 일종의 신뢰구간(confidence interval)이다. 표본통계량 L과 U가 다음 식을 만족할 때, 임의의 구간 $[L,U]$를 모집단의 누적분포함수(cumulative distribution function) F 에서 p/g 확률 및 신뢰도를 갖는 허용구간이라고 한다.

$$P\{F(U)-F(L)\ge p\}\ge g \tag{1}$$

허용구간의 L과 U를 허용한계(tolerance limits)라고 한다. 모집단의 분포함수 F를 미지의 평균 ì와 표준편차 ó를 갖는 정규분포로 가정하면, p/g 확률 및 신뢰도를 갖는 허용구간 $[L,U]$는 ì와 ó, 각각의 표본추정량 $\bar{X}=\sum_1^n X_i/n$ 와 $S=\sqrt{\sum_1^n (X_i-\bar{X})^2/(n-1)}$ 에 의해서 $\left[\bar{X}-kS,\bar{X}+kS\right]$ 가 된다. 이때 k는 정규분포확률곡선에서 허용구간내의 면적이 적어도 p 가 되는 신뢰도가 g 인 허용인자(tolerance factor)다.

나. 붓스트랩기법에 의한 보정된 포함확률을 갖는 *k* 인자 허용구간

붓스트랩 기법은 주어진 표본을 대상으로 복원추출하여 붓스트랩 표본을 구성하는 재표본(resampling) 기법이다. 즉, 충분히 많은 붓스트랩 표본을 구성하여 붓스트랩 표본의 분포를 기반으로 미지의 모집단의 확률분포 및 특성을 추정한다. 주어진 표본의 크기가 충분히 크면 붓스트랩 표본의 확률분포는 모집단의 확률분포와 근사적으로 같아진다는 것이 입증되어 있다[5-6]. 붓스트랩 기법은 표본을 기반으로 모집단에 대한 추정 및 검정을 수행해야 하는 경우에 활용되고 있다

1) D_n 통계량

정규분포 가정하에서 구한 허용구간이 실제 모집단 분포함수의 p 확률을 만족하는지를 알기 위해서는 표본의 경험적 분포함수(empirical distribution function)를 이용해 추정할 수 있다. 참고문헌[1]에서는 모집단의 임의의 확률분포함수 F_0와 표본의 경험적 분포함수 F_n에서 허용구간에 의해 결정되는 확률의 차이를 다음과 같은 확률변수로 정의하였다.

$$D_n=\sqrt{n}\left(F_n\left(\bar{X}+kS\right)-F_n\left(\bar{X}-kS\right)-\left(F_0\left(\bar{X}+kS\right)-F_0\left(\bar{X}-kS\right)\right)\right) \tag{2}$$

식(2)에서 F_0 가 유한한 평균 및 표준편차를 갖고 연속인 분포함수라면, 확률변수 D_n 은 점근적으로

(asymptotically) 정규분포를 한다는 것이 알려져 있다[1]. (0,1) 사이의 고정된 g 에 대해서, d_g 는 D_n의 확률분포의 g 분위수(quantile)로서 다음 식으로 정의된다.

$$P\{F_0(\overline{X}+kS)-F_0(\overline{X}-kS)\geq F_n(\overline{X}+kS)-F_n(\overline{X}-kS)-d_g/\sqrt{n}\}=g \quad (3)$$

식(3)의 부등호 우측부분을 $p_n=F_n(\overline{X}+kS)-F_n(\overline{X}-kS)-d_g/\sqrt{n}$ 라고 하면, 식(3)은 다음 식과 같이 표현된다.

$$P\{F_0(\overline{X}+kS)-F_0(\overline{X}-kS)\geq p_n\}=g \quad (4)$$

만약 모집단의 분포함수 F_0가 기지이면 p_n 은 신뢰계수 g 를 가지는 표본에 의해 결정되는 허용한계 $\overline{X}\pm kS$ 내에서 결정되는 하한(lower bound)이다. 일반적으로 F_0는 미지이므로 D_n의 분포함수는 미지이고, 따라서 d_g 와 p_n 도 미지이다. 여기서 표본에 의해 종속적으로 결정되는 포함확률 p_n 을 추정하기 위해 붓스트랩 방법이 활용된다.

2) 붓스트랩 통계량 D^*_n

모집단의 분포함수가 미지이기 때문에 식(2)에서 D_n의 분포는 D_n의 붓스트랩 통계량에 의해 추정될 수 있다. 이 붓스트랩 통계량은 다음 식과 같이 표현된다.

$$D^*_n=\sqrt{n}\left(F^*_n(\overline{X}^*+kS^*)-F^*_n(\overline{X}^*-kS^*)-\left(F_n(\overline{X}^*+kS^*)-F_n(\overline{X}^*-kS^*)\right)\right) \quad (5)$$

식(5)에서 F^*_n 는 붓스트랩 표본에서 정의되는 경험적 분포함수이고 $\overline{X}^*$ 와 S^* 는 붓스트랩 표본의 평균과 표준편차이다. p_n 을 추정하기 위해서는 식(3)의 d_g 를 추정해야 하고 이를 위해 주어진 표본에서 B 회의 붓스트랩 표본을 반복적으로 추출하여, 각 붓스트랩 표본에서 식(5)의 D^*_n 을 계산한다. 붓스트랩기법의 특징에 의해서 B 개의 D^*_n 값들 중에서 g 분위수인 d^*_g 는 d_g 의 추정량이라고 할 수 있다. 이러한 논리에 근거하여 식(3)의 d_g 대신에 d^*_g 를 대치하면 다음과 같은 식이 표현될 수 있다.

$$P\{F_0(\overline{X}+kS)-F_0(\overline{X}-kS)\geq F_n(\overline{X}+kS)-F_n(\overline{X}-kS)-d^*_g/\sqrt{n}\}\cong g \quad (6)$$

식(6)에서 보는 바와 같이 허용한계 $\overline{X}\pm kS$ 에 의한 모집단 분포함수에서의 포함확률이 적어도 붓스트랩 추정량을 대치한 하한이 될 확률이 근사적으로 g 가 된다. 이 결과는 식(6)를 이용하여 식(3)의 관계를 추정할 수 있음을 나타낸다. 식(6)에서의 하한을 다음 식과 같이 표현한다.

$$p^*_n=F_n(\overline{X}+kS)-F_n(\overline{X}-kS)-d^*_g/\sqrt{n} \quad (7)$$

식(7)에 의해 식(6)은 다음 식과 같이 표현된다.

$$P\{F_0(\overline{X}+kS)-F_0(\overline{X}-kS)\geq p^*_n\}\cong g \quad (8)$$

식(4)와 식(8)의 관계에 의해서 식(7)에서의 p^*_n 은 표본에 종속적으로 결정되는 보정된 포함확률 (corrected-content)이고, 이 확률값은 정규분포를 가정하여 구한 허용구간의 초기 포함확률 p 를

표본의 미지 모집단의 특성을 붓스트랩으로 반영하여 보정한 값이다.

이 방법은 모든 분포함수에서 보정된 p^* 가 g 확률을 만족하기 때문에, 기존의 정규분포 가정에서 정의되었던 k 인자 허용구간에 비해 그 적용범위가 매우 넓다. 확률 g 가 모든 분포함수에서 유지되므로 이러한 특징을 분포함수에 로버스트(robust)하다고 표현한다. 식(2)를 기점으로 만들어진 p^*/g 보정확률 및 신뢰도를 갖는 k 인자 허용구간은 모든 분포함수에 로버스트할 뿐 아니라, 식(2)의 D_n 통계량이 영향함수(influence function)와 분기점(breakdown point) 측면에서도 로버스트하다고 알려져 있다[2]. 이것은 이상치와 같은 특이한 데이터에 대하여 대상 통계량이 영향을 받지 않음을 의미한다. 즉, k 인자 허용한계에 의한 D_n 통계량의 영향함수가 bound된 함수형태로 유도되고, 이것의 분기점도 항상 50 % 이상이기 때문에 로버스트한 측정도구라고 간주할 수 있다[2].

3. 모의실험

본 연구에서는 붓스트랩을 이용하는 p^*/g 보정확률 및 신뢰도를 갖는 k 인자 허용구간에 보간법을 가미하여 부분적으로 개선한 방법을 제안하였다. 이 방법을 이용하여 모의실험을 수행하고 그 결과를 참값과 비교하였다.

가. 밴치마크

Fernholz등[1]의 결과와 비교하기 위하여 Fig.1에 제시된 바와 같은 정규분포, 라플라스(Laplace) 분포와 Student-t 분포를 대상으로 모의실험을 수행하였다. 분포함수에서 추출한 표본크기는 n=10 ,20 ,30, 40, 50, 55 및 80으로 정하였다. 각각의 확률표본은 10000 번씩 반복 추출하였고, 보정확률 p_n^* 를 구하기 위해 붓스트랩 재표본 횟수는 B=2000 번으로 선택하였다. 각각의 분포함수에서 반복 추출한 전체 표본 중에서 식(8)의 확률부분을 만족하는 표본들의 비율을 계산하여 B-conf.(confidence)를 구하였고, 마찬가지로 각각의 분포함수에 대해서 식(1)의 확률부분을 만족하는 표본들의 비율을 계산하여 S-conf.를 구하였다. B-conf.와 S-conf.를 신뢰도 g 와 비교하여 각 분포함수의 신뢰도 g 가 유지되는지를 확인하였다.

나. 경험적 분포함수 결정방법

허용한계 값이 표본의 i 번째 데이터인 $x_{(i)}$ 와 i+1 번째 데이타인 $x_{(i+1)}$ 사이에 포함되어 있을 때, 경험적 확률함수값의 결정방법을 우선 세가지로 나눌 수 있다. 먼저 Start 방법은 $F_n\left(x_{(i)}\right)$ 을, End 방법은 $F_n\left(x_{(i+1)}\right)$ 을, Near 방법은 $x_{(i)}$ 와 $x_{(i+1)}$ 중에서 가까운 쪽의 확률값을 갖는다. 보간법 방법은 두 점 ($x_{(i)}$, $F_n\left(x_{(i)}\right)$)와 ($x_{(i+1)}$, $F_n\left(x_{(i+1)}\right)$)사이에서 허용한계값의 위치에 따른 적합한 확률값을 갖는다. 경험적 분포함수 결정에 기인한 불확도를 확인하기 위해서 포함확률이 최소가 되도록 하는 Mini 방법과 최대가 되도록하는 Maxi. 방법을 추가하였다.

다. 모의실험 절차

모의실험의 전체적인 수행절차에 대한 순서도를 Fig.2에 제시하였다. 이에 대해서 간략히 설명하면 다음과 같다.

1) 기존 방법(ordinary method) 수행 절차

- 주어진 표본 $X = (X_1, \Lambda, X_n)$을 이용하여 경험적 분포함수 $F_n(X)$를 구성한다.
- 주어진 p/g 확률 및 신뢰도에 해당되는 정규분포 가정 하에서의 Howe의 k 값을 결정한다.
- k 인자 허용구간 $[L,U] = [\overline{X} - kS, \overline{X} + kS]$를 구하여 경험적 분포함수 상에서의 확률값 $F_n(L)$과 $F_n(U)$를 결정한다.

2) 붓스트랩(bootstrap method) 수행 절차

- 일양분포(uniform distribution)에서 동일크기의 확률표본 $U = (U_1, \Lambda, U_n)$을 추출한 후, 주어진 표본의 경험적 분포함수에 반영하여 동일크기의 붓스트랩 표본 $X_b^* = (X_1^*, \Lambda\ X_n^*)$을 추출한다.
- 붓스트랩 표본을 이용하여 1)과 같이 붓스트랩표본에 대한 경험적 분포함수 $F_n^*(X_b^*)$를 구성하고, howe의 k 값을 이용하여 붓스트랩 허용구간 $[L^*, U^*] = [\overline{X}_b^* - kS_b^*, \overline{X}_b^* + kS_b^*]$를 구한 후, $F_n^*(L^*)$와 $F_n^*(U)$를 결정한다.
- 1)에서 구한 경험적 분포함수에 L^*와 U^*를 대입하여 $F_n(L^*)$와 $F_n(U^*)$를 구한 후, 식(5)에서 정의한 $D_n^*(b)$를 결정한다.
- 이와 같은 절차를 B 번 반복하여 B 개의 $D_n^*(b)$를 구한 후, 크기 순으로 정렬한 다음, g 분위수에 해당되는 d_g^*를 결정한다.
- 1)에서 구한 $F_n(L)$ 및 $F_n(U)$와 d_g^*를 이용하여 식(7)에 정의한 보정 확률 p_n^*을 결정한다.

3) *B*-conf. 및 상대오차 계산 절차

- 1)에서 구한 k 인자 허용한계에 대한 실제 모집단 분포함수 F_0 에서의 포함확률 $p_0 = F_0(U) - F_0(L)$를 결정한 후, 2)에서 구한 p_n^*보다 큰 경우만 *B*-count에 누적한다.
- 이 전체적인 과정을 N 번 반복 수행한 후, 전체 반복수 N에 대한 최종 *B*-count의 비율인 *B*-conf.를 결정한 후, 신뢰계수 g 에 대한 *B*-conf.의 상대오차를 계산한다.

라. 모의실험 결과분석

1) 평균보정확률 $\overline{p}_n^*$ 값의 비교

세 가지 분포함수를 기준으로 6 가지 방법을 적용하여 확률 및 신뢰도가 75/90과 90/95인 경우에 대해 보정확률의 평균값인 $\overline{p}_n^*$의 결과를 Fernholz등[1]의 결과와 함께 Table 1과 2에 제시하였다. 두 경우에 세 분포함수 모두에서 표본크기 n=20 및 80일 때, 참값을 기준하여 볼 때, 기존 결과와 본 연구의 Start 방법에 의한 결과가 거의 일치하게 나타났다. 보간법을 비롯한 End 및 Near 방법에 의한 계산결과는 n=20에서는 기존 결과와 약간의 차이는 나타냈지만, 이 차이는 n=80에서는 거의 나타나지 않았다. 또한 4 가지 방법으로 보정한 평균

포함확률 값은 Mini.와 Maxi.방법에 의해서 결정한 값의 범위내에 존재하는 것이 확인되었다.

2) ***B*-conf.** 및 ***S*-conf.**의 비교

기존방법과 본 연구에서 제안한 방법들을 이용하여 밴치마크에서 언급했던 유형별로 확률 및 신뢰도가 75/90과 90/95인 두 경우에 대해 *B*-conf.와 *S*-conf.를 계산하여 기존결과와 함께 Table 3과 4에 제시하였다. Start 방법에 의한 *B*-conf.가 세 분포함수의 두 표본크기에서 기존결과와 모두 거의 일치함을 확인하였다. 이로서 본 연구에서 사용한 방법이 기존방법을 잘 재현한다고 볼 수 있다.

보간법에 의한 *B*-conf.는 n=80에서는 Start 방법 및 기존결과가 거의 일치하였으나, n=20에서는 약 5 % 정도 크게 나타나 기존결과에 비해 참값에 접근하였다. 각 경우에 확률이 75인 경우에는 Start 방법 및 보간법이 모든 표본크기에서 동일하게 신뢰도를 만족하지만 확률이 90으로 커지면 보간법에 의한 방법이 주어진 신뢰도를 더 잘 만족하는 것을 알 수 있다. Mini. 및 Maxi.방법에 의한 보정확률값은 보간법의 결과 뿐 아니라 그 외 결과에 의한 보정확률값을 모두 포함하는 것으로 나타났다. 이는 경험적 분포함수의 결정에 기인한 모든 불확도를 포함하고 있음을 나타낸다고 볼 수 있다. 또한 표본크기가 커짐에 따라 간격이 점점 좁혀지는 것을 확인할 수 있다.

Table 3과 4에서 볼 수 있는 바와 같이 본 연구에서 결정한 *S*-conf.와 기존결과는 서로 잘 일치한다. 이로서 본 연구에서 사용한 방법이 기존방법을 잘 재현한다고 볼 수 있다. 한편, 정규분포인 경우에는 이 값이 γ 값에 근사하지만 비정규분포인 라플라스 분포와 스튜던트 t 분포에서는 매우 큰 차이를 보였다. 따라서 비정규분포인 경우에는 보정된 포함확률을 사용해야 한다고 것을 알 수 있다.

4. 붓스트랩기법에 의한 사용후핵연료 핵종량의 포함확률 보정

앞에서 입증한 보간법이 가미된 붓스트랩방법을 활용하여 사용후핵연료에 포함된 21 개 핵종의 핵종량 계산값 대비 실험값 비율의 보정된 포함확률을 결정하였다. 계산 결과의 비교목적으로 각 표본에 대한 평균, 표준편차, 왜도, 첨도 및 정규성 검정(Shapiro-Wilk W)를 계산하였다.

가. 정규성 검정과 이상치 제거

Shapiro-Wilk W 방법을 이용해 정규성 검정을 수행하고 그 결과를 Table 5과 6에 제시하였다. 5 % 유의수준에서 정규성을 만족하는 것은 U-235를 포함해서 8 개 핵종으로 나타났다. 1.5×IQR 법칙에 의해 이상치의 존재여부를 조사했을 때, 이상치가 포함된 핵종으로는 U-234, U-236, U-238, Am-241 그리고 Cs-134로 나타났다. 이들 핵종의 경우에 이상치 제거 후 정규성 검정을 수행한 결과, 동일한 유의수준에서 정규성을 만족하는 핵종은 U-234, Am-241 그리고 Cs-134이었고, U-236과 U-238은 이상치를 제거한 후에도 정규성을 만족하지 않는 것으로 나타났다.

나. 포함확률 보정

21개 핵종의 핵종량 비율에 대한 기술통계량, 허용구간 및 보정된 포함확률을 계산하여

Table 5와 6에 제시하였다. 75/90 확률 및 신뢰도의 경우에 대한 계산 결과인 Table 5에서 볼 수 있듯이 보정된 포함확률은 핵종에 따라서 0.75와 근사한 경우도 있고 벗어나는 경우도 있다. 보정된 p^*_n이 5 % 이상 상향 보정된 핵종으로는 Pu-240, Pu-241, Pu-242 및 Cs-134로 나타났다. 그 외의 핵종들은 5 % 이내에서 상향 또는 하향된 보정확률 값을 나타내었다. 90/95 확률 및 신뢰도인 경우에 5 % 이상 하향 보정된 핵종에 U-234, U-238, Am-241, Sr-90, Tc-99, Cs-134, Nd-148 및 Eu-154이었다. 그 외의 핵종들은 5 % 이내에서 변화를 보였으며 5 % 이상 상향 보정된 핵종은 나타나지 않았다. 각각의 경우에 Mini. 및 Maxi. 방법에 의한 결과는 보간법에 의한 결과를 포함하고 있음을 확인하였다.

이상치를 제거한 U-234, U-236, U-238, Am-241 및 Cs-134 핵종에 대한 결과 중 대표적으로 U-234는 Table 5에서 보듯이 p^*_n이 이상치 제거전의 값보다 약 5 % 이내로 하향 조정되었으며 p=0.75의 5 % 이내의 값으로 보정되었고, Table 6에서 p^*_n 이 1 % 정도 상향 조정되었다. 그 외 4개 핵종에 대한 이상치 제거 전후의 보정확률 p^*_n의 결과는 Table 5 및 6에 제시하였다. 75/90와 90/95인 경우에 Start 방법과 보간법 각각에 의한 보정확률 p^*_n값과 초기 p 값을 Fig. 3과 Fig. 4에 제시하였다.

5. 결론 및 향후계획

보간법을 감미하여 붓스트랩기법을 일부 개선하여 검증한 후, 이를 사용후핵연료에 포함된 21개 핵종의 핵종량 계산값 대비 실험값의 비율 표본에 적용하여 포함확률을 보정한 후 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 포함확률이 작은 경우에는 보간법 방법은 기존 방법과 유사한 B-conf.를 산출하고, 포함확률이 높은 경우에는 참값에 더 접근하는 신뢰도를 산출한다.
- 사용후핵연료 핵종량 비율 표본은 정규성을 가정하고 허용한계를 결정하면 핵종에 따라 포함확률에서 3~12 %의 오차가 발생할 수도 있다.

앞으로 붓스트랩방법의 활용범위를 확장하여 허용한계의 보정에 대한 연구와 이들 방법이 갖는 불확도를 결정할 수 있는 방법을 연구할 할 계획이다. 또한 본 연구에서 사용한 평균값 중심의 방법은 이상치에 대하여 로버스트하지 않다고 알려져 있는데 이를 극복할 수 있는 방법을 연구할 계획이다. .

본 연구는 과학기술부의 원자력 연구개발사업의 일환으로 SF특성계량화기술개발과제에서 수행한 것임.

참 고 문 헌

[1] Luisa T. Fernholz and John A. Gillespie, “Content-Corrected Tolerance Limits Based on the Bootstrap,” Technometrics, Vol. 43, No. 2, 147-155(2001).

[2] Luisa T. Fernholz, “Robustness Issues regarding Content-corrected Tolerance Limits ,” Matrika, Vol. 55, 53-66(2002).

[3] Wald, A and J. Wolfwiz, “Tolerance Limits for a Normal Distribution,” The Analysis of Mathematical Statistics, Vol. 17, 208-215(1946).

[4] Odeh, R. B., *Tables for Normal Tolerance Limits, Sampling Plans, and Screening*, New York:

Marcel Dekker(1980).

[5] B. Efron, “Bootstrap Methods : Another Look at the Jackknife,” The Annals of Statistics, Vol. 7, No. 1, 1-26(1979).

[6] B. Efron. and R. J. Tibshirani, *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman & Hall(1993).

[7] Guenther, W. C., “Tolerance Intervals for Univariate Distribution,” Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 19, 309-333(1972).

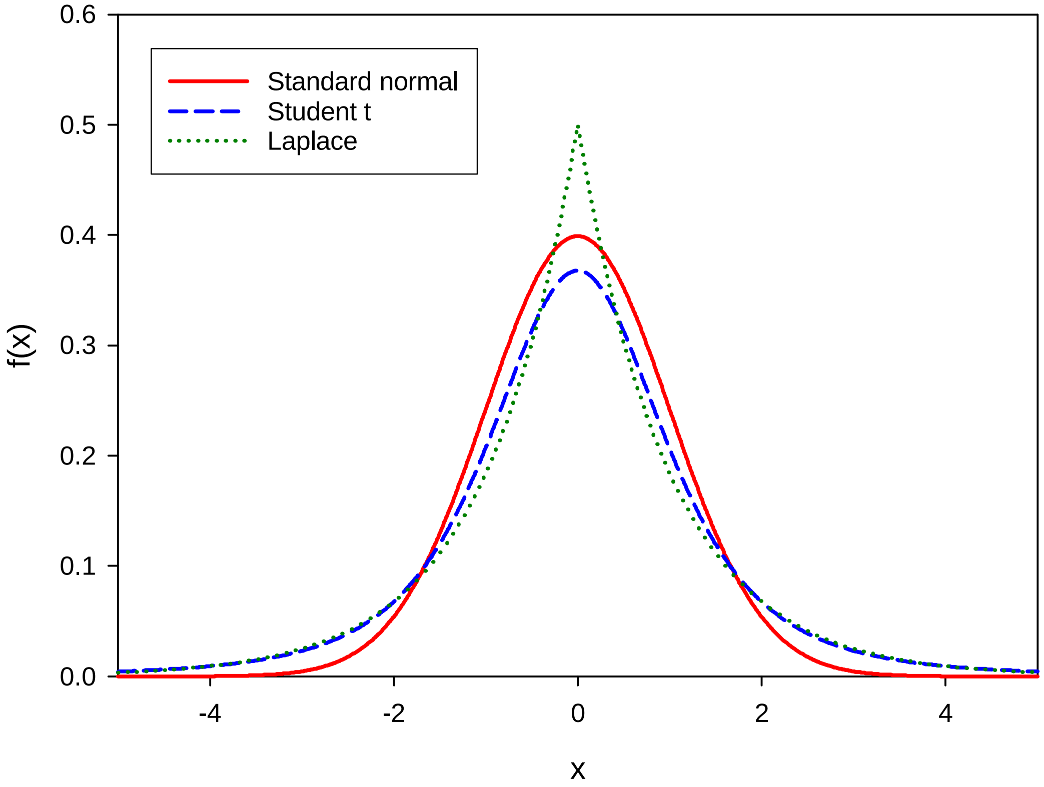

Fig. 1. Three Probability Density Functions.

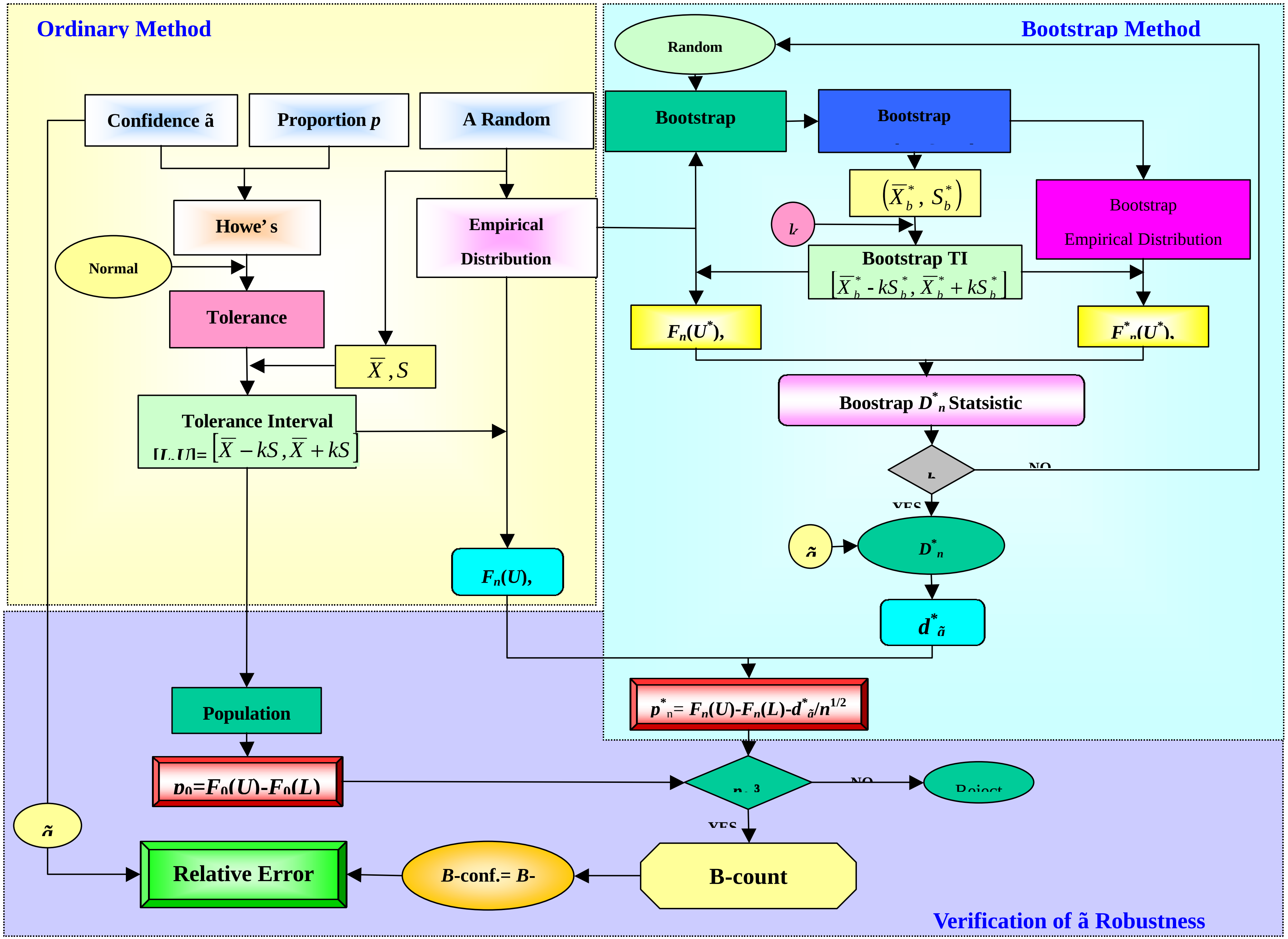

Fig. 2. Procedure of Corrected-Content (p^*) and B-conf. Determination

Table.1. Average Corrected-Contents for Three Populations with the 75/90 Probability and Confidence

Population	Size	k	$\bar{p}_n^*$						
			Ref.(1)	This Study					
				Start	End	Near	Mini.	Interpol.	Maxi.
Normal(0,1)	10	1.773	-	0.7488	0.7729	0.7693	0.6487	0.7675	0.8730
	20	1.505	.7357	0.7352	0.7574	0.7398	0.6851	0.7499	0.8077
	30	1.416	-	0.7394	0.7446	0.7396	0.7058	0.7429	0.7788
	40	1.370	-	0.7349	0.7363	0.7371	0.7095	0.7402	0.7643
	50	1.340	-	0.7391	0.7393	0.7390	0.7185	0.7403	0.7609
	55	1.329	-	0.7396	0.7395	0.7400	0.7205	0.7409	0.7599
	80	1.292	.7405	0.7401	0.7401	0.7403	0.7271	0.7407	0.7536
Laplace(0,1)	10	1.773	-	0.7260	0.7626	0.7721	0.6259	0.7640	0.8627
	20	1.505	.7489	0.7458	0.7635	0.7473	0.6958	0.7562	0.8138
	30	1.416	-	0.7585	0.7630	0.7582	0.7250	0.7630	0.7984
	40	1.370	-	0.7659	0.7671	0.7664	0.7402	0.7688	0.7953
	50	1.340	-	0.7682	0.7685	0.7693	0.7477	0.7715	0.7916
	55	1.329	-	0.7710	0.7710	0.7714	0.7523	0.7732	0.7917
	80	1.292	.7763	0.7761	0.7759	0.7768	0.7630	0.7778	0.7903
Student t(3)	10	1.773	-	0.7285	0.7663	0.7738	0.6285	0.7645	0.8663
	20	1.505	.7621	0.7608	0.7753	0.7577	0.7107	0.7673	0.8258
	30	1.416	-	0.7773	0.7820	0.7760	0.7438	0.7807	0.8177
	40	1.370	-	0.7884	0.7897	0.7882	0.7628	0.7908	0.8179
	50	1.340	-	0.7952	0.7955	0.7954	0.7747	0.7976	0.8186
	55	1.329	-	0.7988	0.7989	0.7989	0.7801	0.8007	0.8199
	80	1.292	.8095	0.8091	0.8089	0.8095	0.7960	0.8104	0.8234

Table.2. Average Corrected-Contents of Three Populations at the 90/95 Probability and Confidence

Population	Size	k	$\bar{p}_n^*$						
			Ref.(1)	This Study					
				Start	End	Near	Mini.	Interpol.	Maxi.
Normal(0,1)	10	2.838	-	0.8859	0.8494	0.8605	0.7859	0.8571	0.9719
	20	2.310	.8985	0.8981	0.8878	0.8894	0.8480	0.8910	0.9420
	30	2.140	-	0.8947	0.8960	0.8957	0.8613	0.8977	0.9301
	40	2.052	-	0.8943	0.8981	0.8954	0.8693	0.8985	0.9234
	50	1.996	-	0.8936	0.8979	0.8945	0.8735	0.8976	0.9182
	55	1.976	-	0.8929	0.8975	0.8940	0.8747	0.8970	0.9160
	80	1.907	.8932	0.8931	0.8952	0.8936	0.8805	0.8954	0.9083
Laplace(0,1)	10	2.838	-	0.8605	0.8338	0.8348	0.7606	0.8362	0.9528
	20	2.310	.8634	0.8630	0.8636	0.8653	0.8129	0.8663	0.9159
	30	2.140	-	0.8619	0.8721	0.8650	0.8285	0.8704	0.9057
	40	2.052	-	0.8676	0.8741	0.8672	0.8426	0.8721	0.8994
	50	1.996	-	0.8698	0.8752	0.8707	0.8498	0.8741	0.8957
	55	1.976	-	0.8712	0.8759	0.8722	0.8529	0.8752	0.8949
	80	1.907	.8765	0.8762	0.8777	0.8770	0.8635	0.8784	0.8915
Student t(3)	10	2.838	-	0.8652	0.8373	0.8371	0.7652	0.8384	0.9564
	20	2.310	.8655	0.8643	0.8650	0.8658	0.8142	0.8662	0.9174
	30	2.140	-	0.8660	0.8769	0.8674	0.8327	0.8736	0.9106
	40	2.052	-	0.8744	0.8816	0.8732	0.8494	0.8785	0.9070
	50	1.996	-	0.8803	0.8848	0.8790	0.8602	0.8829	0.9053
	55	1.976	-	0.8819	0.8860	0.8814	0.8637	0.8845	0.9049
	80	1.907	.8912	0.8912	0.8925	0.8910	0.8785	0.8927	0.9063

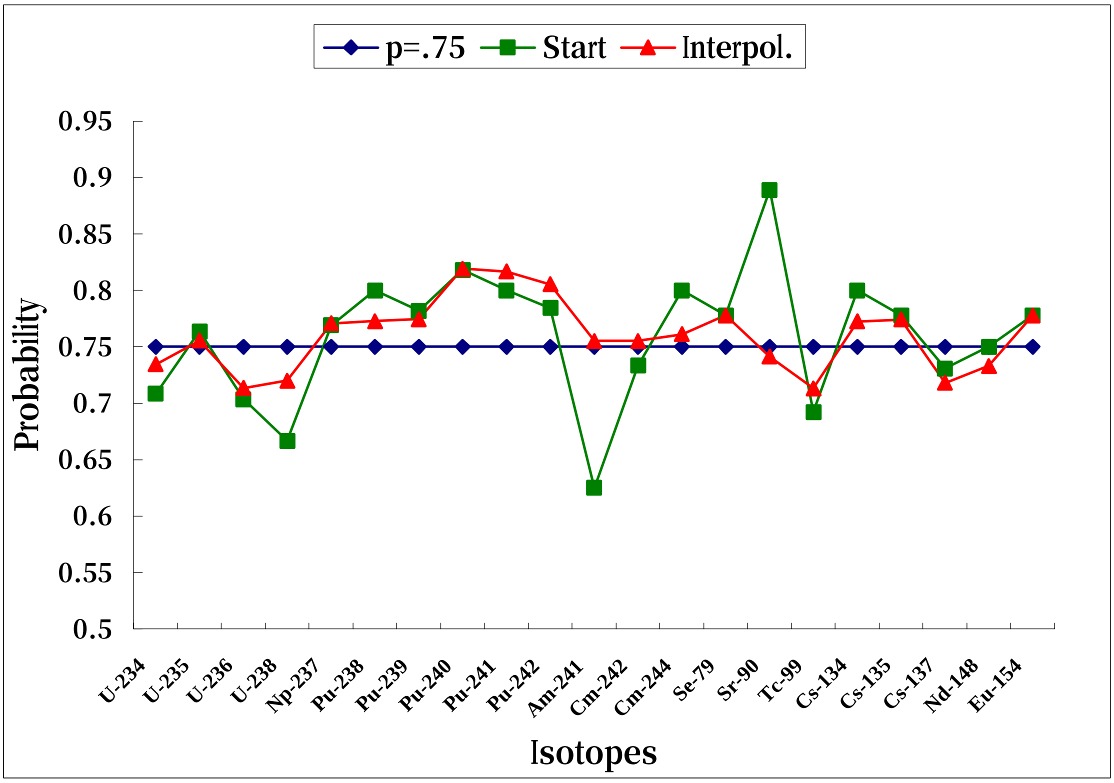

Fig. 3. Effects of Empirical Distribution Determination Method at the 75 Probability.

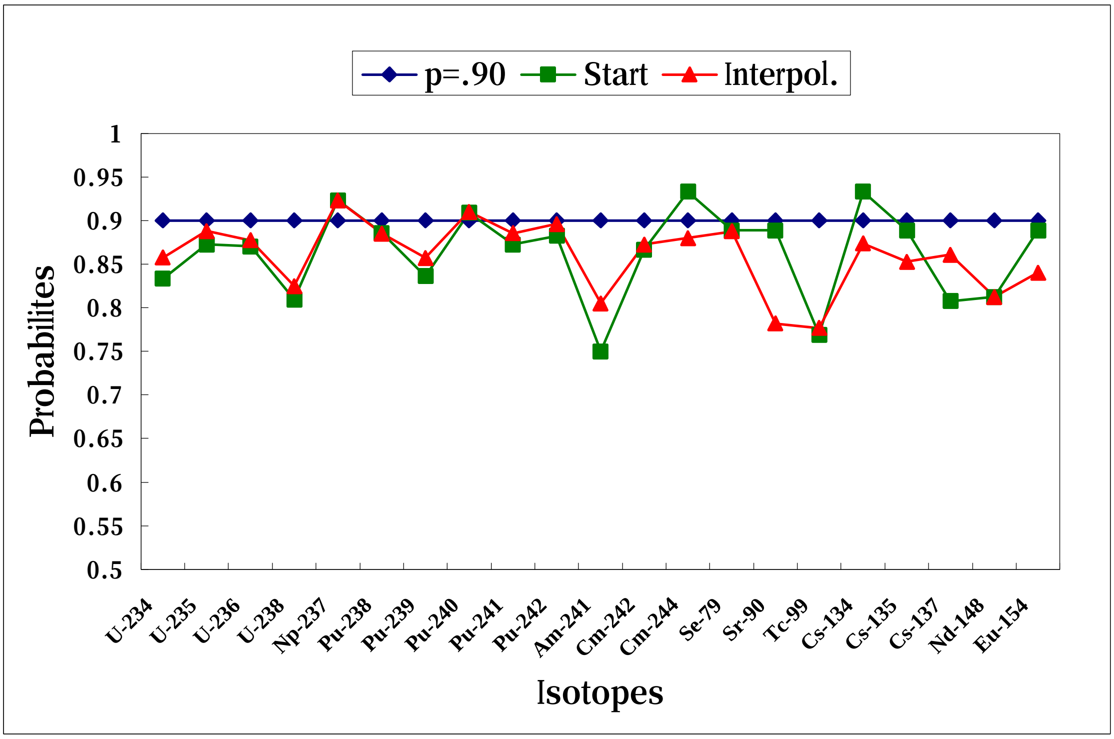

Fig. 4. Effects of Empirical Distribution Determination Method at the 90 Probability.

Table. 3. Simulated *B*-conf. and *S*-conf. with the 75/90 Probability and Confidence

Population	Size	k^*	*S*-conf.		*B*-conf.						
					Ref.(1)	This Study					
			Ref.(1)	This Study		Start	End	Near	Mini.	Interpol.	Maxi.
Normal (0,1)	10	1.773	-	0.8987	-	0.8847	0.8549	0.8622	0.9646	0.8729	0.5759
	20	1.505	.8963	0.8953	.8944	0.8925	0.8506	0.8917	0.9592	0.8789	0.6806
	30	1.416	-	0.8979	-	0.8841	0.8729	0.8911	0.9484	0.8883	0.7515
	40	1.370	-	0.9006	-	0.8998	0.8938	0.8961	0.9482	0.8921	0.7973
	50	1.340	-	0.8993	-	0.8900	0.8894	0.8932	0.9404	0.8899	0.8036
	55	1.329	-	0.8961	-	0.8871	0.8871	0.8912	0.9367	0.8901	0.8035
	80	1.292	.8998	0.9005	.8941	0.8944	0.8943	0.8967	0.9372	0.8948	0.8308
Laplace (0,1)	10	1.773	-	0.8922	-	0.8878	0.8415	0.8381	0.9688	0.8661	0.5569
	20	1.505	.9167	0.9183	.9012	0.9038	0.8721	0.9106	0.9637	0.9035	0.7130
	30	1.416	-	0.9373	-	0.8972	0.8829	0.9044	0.9556	0.8956	0.7618
	40	1.370	-	0.9502	-	0.8865	0.8838	0.8959	0.9469	0.8892	0.7757
	50	1.340	-	0.9607	-	0.8996	0.8976	0.9022	0.9485	0.8966	0.8067
	55	1.329	-	0.9674	-	0.8946	0.8934	0.8968	0.9450	0.8926	0.8057
	80	1.292	.9702	0.9796	.8966	0.8990	0.9004	0.8968	0.9432	0.8954	0.8265
Student t(3)	10	1.773	-	0.8906	-	0.8811	0.8391	0.8474	0.9640	0.8631	0.5445
	20	1.505	.9292	0.9209	.9103	0.9044	0.8757	0.9100	0.9661	0.9012	0.7216
	30	1.416	-	0.9482	-	0.9045	0.8932	0.9125	0.9589	0.9077	0.7778
	40	1.370	-	0.9591	-	0.9060	0.9015	0.9087	0.9545	0.9062	0.7946
	50	1.340	-	0.9671	-	0.9043	0.9017	0.9108	0.9531	0.9052	0.8062
	55	1.329	-	0.9714	-	0.9034	0.9019	0.9093	0.9501	0.9053	0.8161
	80	1.292	.9871	0.9854	.9049	0.9020	0.9025	0.9044	0.9442	0.9030	0.8282

- k^* is calculated with Howe's method[7].

Table. 4. Simulated *B*-conf. and *S*-conf. with the 90/95 Probability and Confidence

Population	Size	k	*S*-conf.		*B*-conf.						
					Ref.(1)	This Study					
			Ref.(1)	This Study		Start	End	Near	Mini.	Interpol.	Maxi.
Normal (0,1)	10	2.838	-	0.9498	-	0.8222	0.9694	0.9653	0.9874	0.9713	0.2619
	20	2.310	.9506	0.9464	.9040	0.9035	0.9344	0.9414	0.9760	0.9455	0.6921
	30	2.140	-	0.9469	-	0.9091	0.9205	0.9289	0.9730	0.9314	0.7458
	40	2.052	-	0.9491	-	0.9164	0.9087	0.9208	0.9668	0.9221	0.7811
	50	1.996	-	0.9488	-	0.9223	0.9092	0.9248	0.9727	0.9213	0.7965
	55	1.976	-	0.9469	-	0.9277	0.9116	0.9295	0.9719	0.9232	0.8055
	80	1.907	.9520	0.9505	.9334	0.9349	0.9256	0.9369	0.9678	0.9331	0.8519
Laplace (0,1)	10	2.838	-	0.8833	-	0.8723	0.9344	0.9334	0.9759	0.9432	0.4178
	20	2.310	.8754	0.8711	.9027	0.9007	0.9077	0.9163	0.9709	0.9201	0.7017
	30	2.140	-	0.8679	-	0.9260	0.9063	0.9247	0.9740	0.9196	0.7651
	40	2.052	-	0.8602	-	0.9340	0.9134	0.9381	0.9742	0.9300	0.8014
	50	1.996	-	0.8670	-	0.9393	0.9231	0.9423	0.9754	0.9382	0.8325
	55	1.976	-	0.8664	-	0.9399	0.9258	0.9425	0.9759	0.9384	0.8423
	80	1.907	.8610	0.8698	.9379	0.9429	0.9369	0.9456	0.9731	0.9436	0.8751
Student t(3)	10	2.838	-	0.8868	-	0.8605	0.9357	0.9275	0.9732	0.9415	0.3907
	20	2.310	.9024	0.8824	.8907	0.8890	0.8979	0.9105	0.9696	0.9143	0.6837
	30	2.140	-	0.8883	-	0.9239	0.9058	0.9236	0.9752	0.9214	0.7656
	40	2.052	-	0.8936	-	0.9347	0.9165	0.9358	0.9710	0.9304	0.8126
	50	1.996	-	0.9007	-	0.9367	0.9224	0.9464	0.9753	0.9381	0.8400
	55	1.976	-	0.9044	-	0.9421	0.9297	0.9455	0.9770	0.9399	0.8504
	80	1.907	.9278	0.9223	.9510	0.9462	0.9406	0.9479	0.9729	0.9460	0.8784

k^* is calculated with Howe's method[7].

Table. 5. Statistical Results for 21 Samples with the 75/90 Probability and Confidence

Isotopes	Size	Mean	Stand.	Skew.	Kurt.	W	*k*	Lower	Upper	Corrected-Content p^*_n					
										Start	End	Near	Mini.	Interpol.	Maxi.
U-234	25	0.9977	0.1060	1.1107	2.6022	0.0342	1.452	0.8438	1.1517	0.7600	0.7600	0.7200	0.7200	0.7552	0.8233
	24	0.9845	0.0847	0.3025	1.0659	0.4209	1.461	0.8608	1.1082	0.7083	0.7500	0.7500	0.6667	0.7345	0.7917
U-235	55	1.0283	0.0387	0.4516	-0.2190	0.2812	1.329	0.9768	1.0797	0.7636	0.7636	0.7455	0.7455	0.7556	0.7827
U-236	55	1.0030	0.0435	1.3184	2.8427	0.0005	1.329	0.9453	1.0611	0.7818	0.7818	0.7636	0.7636	0.7714	0.8022
	54	1.0002	0.0379	0.7868	0.9033	0.0276	1.331	0.9498	1.0506	0.7037	0.7037	0.7222	0.6852	0.7134	0.7232
U-238	49	1.0007	0.0051	0.5911	2.9713	<0.0001	1.343	0.9939	1.0075	0.7959	0.7551	0.7551	0.7143	0.7632	0.8367
	42	0.9996	0.0025	0.2178	1.0885	0.0035	1.363	0.9963	1.0030	0.6667	0.6905	0.7381	0.6190	0.7201	0.7381
Np-237	13	0.9524	0.0880	0.2212	-1.1785	0.2932	1.647	0.8074	1.0974	0.7692	0.7692	0.7692	0.7692	0.7708	0.7708
Pu-238	35	1.0993	0.1008	1.0880	1.5498	0.0212	1.390	0.9592	1.2395	0.8000	0.8000	0.7714	0.7655	0.7728	0.8286
Pu-239	55	1.0155	0.0528	1.2006	0.9372	<0.0001	1.329	0.9453	1.0857	0.7818	0.7636	0.7818	0.7455	0.7746	0.8000
Pu-240	55	1.0200	0.0285	0.8937	3.2919	0.0148	1.329	0.9831	1.0589	0.8182	0.7818	0.8182	0.7636	0.8193	0.8439
Pu-241	55	1.0377	0.0672	1.4836	2.1984	<0.0001	1.329	0.9484	1.1271	0.8000	0.8182	0.8182	0.8000	0.8167	0.8185
Pu-242	51	1.0009	0.0638	0.8761	2.6977	0.0282	1.338	0.9155	1.0863	0.7843	0.7843	0.8235	0.7647	0.8054	0.8235
Am-241	9	1.1616	0.2023	2.5809	6.9967	0.0002	1.836	0.7901	1.5330	0.6667	0.7778	0.7778	0.6667	0.7420	0.7778
	8	1.0969	0.0612	1.3970	2.3350	0.1809	1.918	0.9795	1.2142	0.6250	0.8750	0.7500	0.6250	0.7552	0.8750
Cm-242	15	1.4235	0.0715	1.0834	1.1912	0.0742	1.593	1.3096	1.5375	0.7333	0.8000	0.7333	0.7319	0.7551	0.8000
Cm-244	15	1.0920	0.0435	-0.5001	-0.5766	0.3169	1.593	1.0233	1.1619	0.8000	0.7333	0.7333	0.7333	0.7611	0.8072
Se-79	9	0.8843	0.0870	-0.5073	-0.8126	0.4561	1.836	0.7245	1.0441	0.7778	0.7778	0.7778	0.7778	0.7778	0.7778
Sr-90	9	0.9723	0.0116	-0.8415	1.0805	0.6718	1.836	0.9511	0.9936	0.8889	0.5556	0.7778	0.5481	0.7412	0.8889
Tc-99	13	0.8783	0.1073	-1.0381	-0.3441	0.0116	1.647	0.7016	1.0550	0.6923	0.6923	0.7692	0.6154	0.7133	0.7692
Cs-134	16	1.2361	0.1193	1.8838	6.6193	0.0028	1.571	1.0486	1.4235	0.8125	0.8125	0.8125	0.7362	0.8145	0.8750
	15	1.2113	0.0687	-1.0872	2.2419	0.1523	1.593	1.1018	1.3207	0.8000	0.7333	0.7333	0.7333	0.7726	0.8134
Cs-135	9	0.9623	0.0199	-0.5431	0.0919	0.6780	1.836	0.9257	0.9989	0.7778	0.6667	0.7778	0.6667	0.7742	0.7782
Cs-137	26	0.9882	0.0140	-0.0205	0.3692	0.4879	1.444	0.9680	1.0083	0.7308	0.7308	0.6923	0.6923	0.7180	0.7812
Nd-148	16	1.0006	0.0133	-0.2982	-1.8290	0.0034	1.571	0.9797	1.0214	0.7500	0.7500	0.7500	0.7331	0.7331	0.7500
Eu-154	9	1.2183	0.0597	-0.6952	-0.9105	0.2589	1.836	1.1087	1.3280	0.7778	0.7778	0.7778	0.7778	0.7778	0.7778

Table. 6. Statistical Results for 21 Samples with the 90/95 Probability and Confidence

Isotopes	Size	Mean	Stand.	Skew.	Kurt.	W	*k*	Lower	Upper	Corrected-Content p^*_n					
										Start	End	Near	Mini.	Interpol.	Maxi.
U-234	25	0.9977	0.1060	1.1107	2.6022	0.0342	2.208	0.7636	1.2318	0.8400	0.8800	0.8400	0.8332	0.8464	0.8800
	24	0.9845	0.0847	0.3025	1.0659	0.4209	2.225	0.7961	1.1729	0.8333	0.8750	0.8750	0.8322	0.8574	0.8750
U-235	55	1.0283	0.0387	0.4516	-0.2190	0.2812	1.976	0.9517	1.1048	0.8727	0.8909	0.8909	0.8720	0.8879	0.8909
U-236	55	1.0030	0.0435	1.3184	2.8427	0.0005	1.976	0.9172	1.0892	0.8727	0.8909	0.8909	0.8727	0.8884	0.8957
	54	1.0002	0.0379	0.7868	0.9033	0.0276	1.979	0.9253	1.0752	0.8704	0.8704	0.8889	0.8519	0.8773	0.8889
U-238	49	1.0007	0.0051	0.5911	2.9713	<0.0001	2.001	0.9906	1.0109	0.8571	0.7959	0.7959	0.7755	0.8253	0.8776
	42	0.9996	0.0025	0.2178	1.0885	0.0035	2.039	0.9946	1.0047	0.8095	0.8571	0.8333	0.7857	0.8250	0.8571
Np-237	13	0.9524	0.0880	0.2212	-1.1785	0.2932	2.587	0.7247	1.1801	0.9231	0.9231	0.9231	0.9231	0.9231	0.9231
Pu-238	35	1.0993	0.1008	1.0880	1.5498	0.0212	2.090	0.8887	1.3100	0.8857	0.9143	0.8857	0.8834	0.8850	0.9143
Pu-239	55	1.0155	0.0528	1.2006	0.9372	<0.0001	1.976	0.9112	1.1198	0.8364	0.8727	0.8727	0.8364	0.8573	0.8746
Pu-240	55	1.0200	0.0285	0.8937	3.2919	0.0148	1.976	0.9647	1.0773	0.9091	0.9273	0.8909	0.8909	0.9102	0.9455
Pu-241	55	1.0377	0.0672	1.4836	2.1984	<0.0001	1.976	0.9050	1.1705	0.8727	0.8727	0.8909	0.8545	0.8853	0.8909
Pu-242	51	1.0009	0.0638	0.8761	2.6977	0.0282	1.992	0.8737	1.1280	0.8824	0.9020	0.9020	0.8824	0.8962	0.9025
Am-241	9	1.1616	0.2023	2.5809	6.9967	0.0002	2.967	0.5614	1.7617	0.7778	0.8889	0.7778	0.7778	0.7844	0.8889
	8	1.0969	0.0612	1.3970	2.3350	0.1809	3.135	0.9050	1.2888	0.7500	0.8750	0.7500	0.7500	0.8049	0.8750
Cm-242	15	1.4235	0.0715	1.0834	1.1912	0.0742	2.480	1.2461	1.6009	0.8667	0.9333	0.8667	0.8667	0.8727	0.9333
Cm-244	15	1.0920	0.0435	-0.5001	-0.5766	0.3169	2.480	0.9847	1.2005	0.9333	0.8667	0.8667	0.8667	0.8801	0.9333
Se-79	9	0.8843	0.0870	-0.5073	-0.8126	0.4561	2.967	0.6261	1.1425	0.8889	0.7778	0.8889	0.7778	0.8876	0.8889
Sr-90	9	0.9723	0.0116	-0.8415	1.0805	0.6718	2.967	0.9380	1.0066	0.8889	0.6667	0.7778	0.6667	0.7820	0.8889
Tc-99	13	0.8783	0.1073	-1.0381	-0.3441	0.0116	2.587	0.6008	1.1558	0.7692	0.7692	0.7692	0.7692	0.7767	0.7767
Cs-134	16	1.2361	0.1193	1.8838	6.6193	0.0028	2.437	0.9452	1.5269	0.8125	0.8750	0.8125	0.7500	0.8275	0.8750
	15	1.2113	0.0687	-1.0872	2.2419	0.1523	2.480	1.0409	1.3816	0.9333	0.8000	0.8667	0.8000	0.8737	0.9333
Cs-135	9	0.9623	0.0199	-0.5431	0.0919	0.6780	2.967	0.9032	1.0215	0.8889	0.7778	0.8889	0.7778	0.8528	0.8889
Cs-137	26	0.9882	0.0140	-0.0205	0.3692	0.4879	2.193	0.9576	1.0188	0.8077	0.8846	0.8462	0.8077	0.8608	0.8846
Nd-148	16	1.0006	0.0133	-0.2982	-1.8290	0.0034	2.437	0.9682	1.0329	0.8125	0.8125	0.8125	0.8125	0.8125	0.8125
Eu-154	9	1.2183	0.0597	-0.6952	-0.9105	0.2589	2.967	1.0411	1.3955	0.8889	0.7778	0.8889	0.7778	0.8404	0.8889