2003 춘계학술발표회 논문집
한국원자력학회

마찰을 동반한 탄성 구조물의 접촉 역학 및 응용

Structural Analysis of Contacting Elastic Bodies with Friction and Its Application

박 남규, 오 승은, 최 기성, 김 형구, 이 준노, 김 규태
한전원자력연료㈜
대전시 유성구 덕진동 493

요 약
여러 개의 부품으로 구성된 기계 구조물은 부품간의 상호접촉을 통하여 에너지를 교환한다. 대부분의 접촉은 마찰을 수반하며 마찰현상의 비선형성으로 인해 이러한 접촉 현상은 비선형적인 해석방법이 필요하다. 본 연구는 탄성영역에서 마찰을 수반한 접촉에 의한 비선형 현상의 역학적 개념을 변분부등식을 통하여 고찰하였다. 응용예제로 핵연료집합체 상단고정체의 부품간의 접촉에 의한 비선형 현상을 다루었고 상용프로그램을 이용한 3차원 구조물 모델의 근사해를 제시하였다. 이때의 근사해는 접촉에 의한 영향과 Coulomb 마찰모델을 충분히 반영한 것으로 평가된다.

Abstract
Interactions such as contact between several different components in a structure are major energy transfer mechanism. Especially contact with friction, which is a nonlinear phenomenon, is understood as one of typical nonlinear mechanics, thus nonlinear analysis is required to obtain solution. This work formulated the contact mechanism with Coulomb friction as variational inequality which is different from ordinary structure model. Approximated solution of contact problem, which is solved for some components of upper-end-fitting in nuclear fuel assembly, is proposed using commercial software. It is evaluated that the contact between two bodies is found in the approximated solution and Coulomb friction model is well-defined.

1.서론

기계구조물의 대부분은 각 부품간의 상호작용을 통하여 필요한 기능을 수행하도록 설계되었다. 따라서 서로 상호작용을 하는 동안 기계 부품간의 물리적인 접촉은 필연적으로 수반되며 이러한 접촉현상으로 국부적인 응력집중을 수반하여 구조물의 건전성에 악영향을 끼치는 경우도 있다. 또한 마찰을 수반한 주기적인 접촉이 발생

하는 경우 피로에 의한 영향으로 구조물의 수명을 단축시켜 최초의 설계 기준을 만족 하지 않는 경우도 발생할 수 있다. 그러므로 접촉에 의한 구조물의 건전성을 예측할 수 있도록 접촉에 의한 구조물의 거동이나 응력 분포 등을 해석하는 작업이 요구된다.

접촉현상은 접촉이 일어나는 부위는 외력의 분포나 시간의 변화에 의해 변하므로 고정된 접촉면 경계를 가정할 수 없다. 또한 가상일의 원리에 의한 에너지방정식은 등식(equality)이 아닌 부등식(inequality) 이므로 일반적인 구조물의 해를 찾는 방법과는 다른 비선형 문제로 알려져 있다. 마찰을 수반하는 경우, 통상 마찰은 Coulomb 마찰을 가정하므로 마찰에너지는 불연속으로 기술되어 미분 불가능하다. 이러한 여러가지 해석적인 어려움을 해결하고자 많은 가정을 도입하여 해법을 찾고 있으며, 최초로 Hertz[1]는 접촉면의 기하형상을 타원으로 제한하여 해석하였다. Hertz에 의해 도입된 접촉 이론은 마찰이 없음을 가정하고 접촉면의 크기가 두 물체의 대표크기에 비해 상대적으로 작다는 가정을 하므로 그 응용분야가 제한적이나 탄성접촉현상을 이해하는데 많은 도움을 준다. Coulomb 마찰이 존재하는 경우, 일반적인 해의 존재 가능성은 아직까지 알려지지 않고 있으나 몇 가지 가정을 통해 해의 존재와 유일성을 보장할 수 있다[2,3].

Hertz에 의한 접촉 모델의 도입이후 현재까지 접촉문제의 해를 찾기 위한 많은 시도가 이루어 졌고 컴퓨터의 발전과 더불어 고차원적이고 실용적인 접촉문제에 대한 이해의 폭을 넓힐 수 있었다. Hughes 등[4]은 무마찰 혹은 서로 밀착하여 거동하는 선형탄성 문제에 대한 수치적 해법을 제시하였다. 접촉이 발생하면 서로 접촉하는 경계면의 요소간의 절점들의 연결관계(connectivity)가 중요하며 Kulak[5]은 3차원 접촉문제에 대한 접촉 요소를 제시하였다. 섭동 라그랑지(perturbed Lagrange) 방법을 사용하여 오차를 줄이기 위한 요한요소 방법이 Simo 등[6]에 의하여 연구되었으며, Martin 등[7]은 동적접촉 현상을 수학적으로 설명하였고 이를 응용하였다.

본 연구에서는 접촉현상에 대한 역학 관계의 개략적인 이론을 도입한 후 이를 수치적으로 구현한 상용 프로그램을 이용하여 접촉조건을 수반하는 구조물의 3차원 응력 해석을 수행할 것이다. 본 연구에서 다룰 접촉조건을 갖는 응용 예는 접촉 현상이 관측되는 한국표준형원자로(KSNP) 핵연료집합체 상단고정체 부분을 대상으로 할 것이다. 상단고정체는 여러 개의 부품으로 구성되며 외력이 가해지는 경우 부품간의 접촉이 일어나며 마찰을 수반하는 것으로 알려져 있다[8]. 따라서 마찰 접촉조건을 수반하는 비선형 문제로 정의할 수 있으며, 이에 대한 응력 분포를 해석하고자 한다.

2. 접촉 메카니즘과 변분부등식

탄성체간의 접촉현상은 변분부등식으로 표현할 수 있으며 탄성이론에서는 Signorini 문제[2,3]로 알려져 있다. Fig.1과 같은 마찰이 존재하는 두 탄성체 간에 접

촉이 일어나는 현상은 다음과 같은 식으로 기술할 수 있다.

$\sigma_{ij,j} + f_i = 0,\ in\ \Omega$ (1)

$u_i = 0,\ on\ \Gamma_d$ (2)

$\sigma_{ij} n_j = t_i,\ on\ \Gamma_t$ (3)

$\sigma_n = 0\ and\ \sigma_T = 0\ if\ u_n^1 + u_n^2 < g\ on\ \Gamma_c$ (4)

$$\begin{cases} if\ u_n = g\ \ then\ \sigma_n < 0,\ and\ if\ |\sigma_T| < \nu|\sigma_n|\ then\ \ u_T = 0. \\ if\ \ |\sigma_T| = \nu|\sigma_n|\ then\ \ ^{\exists}\lambda \ge 0\ \ such\ that\ u_T = -\lambda\sigma_T. \end{cases} \quad (5)$$

여기서 식(1)의 영역 Ω는 두 탄성체 Ω_1, Ω_2의 영역을 뜻하며 *n*은 수직방향의 단위벡터를 의미한다. 식(2,3)은 각 영역에서의 통상의 변위경계조건과 힘경계조건(traction boundary condition)을 의미한다. 식(4,5)는 접촉면이 존재하는 경우에 부가되는 경계조건으로 g는 두 물체 사이의 간격을 의미하고 불침투 조건에 의해 식(4)의 조건이 결정된다. σ_n 은 접촉면에 수직으로 작용하는 압력이며 σ_T 는 마찰의 존재로 인한 접촉면의 접선 방향으로의 힘으로 각 성분은 다음과 같다.

$\sigma_{Ti} = \sigma_{ij} n_i - \sigma_n$ (6)

또한 식(5)는 Coulomb마찰을 기술하는 식으로 ν는 마찰계수를 의미한다.

위에서 정의한 문제를 변분식으로 서술하기위해서 포텐셜 에너지를 쌍일차의 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$a(u, w-u) = \int_\Omega \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(w-u)d\Omega = \int_\Omega \sigma_{ij}\left(w_{i,j} - u_{i,j}\right)d\Omega = -\int_\Omega \sigma_{ij,j}(w_i - u_i)d\Omega + \int_\Gamma \sigma_{ij} n_j (w_i - u_i)d\Gamma \quad (7)$$

여기서 ε은 스트레인을 의미하고 가상변위 *w*는 다음과 같이 정의된 힐버트공간 *V*에 속하고 *u*는 위에서 정의한 문제의 해(solution)이다.

$$V = \left\{ w \in H^1(\Omega) \middle| \gamma_d(w) = 0\ on\ \Gamma_d,\ \gamma_n(w) - g \le 0\ on\ \Gamma_c \right\} \quad (8)$$

여기서 γ 는 영역 Ω에서 정의된 함수를 경계면으로 사상시키는 연산자(trace operator)이다. 또한 외력에 의한 가상일은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f(w) = \int_\Omega f_i w_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i w_i d\Gamma,\ w \in V \quad (9)$$

따라서 식(1),(6),(9)를 고려하면 식(7)은

$$a(u, w-u) - f(w-u) = \int_{\Gamma_C} \sigma_{ij} n_j (w_i - u_i)d\Gamma = \int_{\Gamma_C} \left[\sigma_T(w_t - u_t) + \sigma_n(w_n - u_n)\right]d\Gamma \quad (10)$$

또한 다음 식(11)과 같은 마찰에 의한 가상일 $j : V \times V \to R$ 를 도입하면

$$j(u, w) \equiv \int_{\Gamma_C} \nu|\sigma_n(u)||w_t|d\Gamma \quad (11)$$

전체 계의 에너지는 식(9~11)을 고려하여 식(12)와 같이 나타낼 수 있다.

$$a(u,w-u)+j(u,w)-j(u,u)-f(w-u)=\int_{\Gamma_C}\left[\sigma_T(w_t-u_t)+\sigma_n(w_n-u_n)+v|\sigma_n|(|w_T|-|u_T|)\right]d\Gamma \tag{12}$$

위의 식(12)의 우변은 항상 음이 아니므로[3], 다음의 부등식을 만족한다.

$$a(u,w-u)+j(u,w)-j(u,u)-f(w-u)\geq 0 \tag{13}$$

식(13)의 부등식은 Coulomb마찰을 가정하여 기술한 식으로 마찰에의한 에너지가 미분 불가능하여 얻어진 결과이다. 따라서 일반적인 유한요소법을 이용한 해를 구하기 위해서는 마찰함수를 미분가능 한 함수로 표현할 수 있도록 하는 근사적 기법이 요구된다. 또한 식(11)에서 $|\sigma_n|$ 은 쌍대공간(dual space) $H^{-1/2}(\Gamma_c)$ 에서 정의 되어야 하므로 전체 영역 Ω에서 적분할 수 없다.

3. 마찰함수의 근사화

전절에서 설명한 접촉 마찰에 의한 부등식이 해를 갖기 위해서는 접촉이 일어나는 부분에서의 응력 $|\sigma_n|$을 알고 있어야 하며 이때 마찰 함수 $j:V\rightarrow R$ 는 다음식(14)와 같고

$$j(w)\equiv\int_{\Gamma_C}s|w_t|d\Gamma \tag{14}$$

여기서 $s=v|\sigma_n|$ 이다.

또한 Coulomb마찰에 의한 일을 미분 가능하도록 조건을 완화하기 위해 $|w_t|$ 를 다음식(15)과 같이 근사화 할 수 있고 이것은 Fig.2(a)에 도시한 바와 같다..

$$|w_T|\approx\phi(w_T)=\begin{cases}|w_T|-\dfrac{\varepsilon}{2},\ if\ |w_T|>\varepsilon\\ \dfrac{|w_T|^2}{2\varepsilon},\ if\ |w_T|\leq\varepsilon\end{cases} \tag{15}$$

따라서 이렇게 근사화된 함수는 미분 가능(*Gâteaux* differentiable)하다. 마찰함수의 근사화에 의한 해를 $\tilde{u}$ 라 하면 식(13)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$a(\tilde{u},w-\tilde{u})+j(w)-j(\tilde{u})-f(w-\tilde{u})\geq 0 \tag{16}$$

그리고 $^{\forall}\zeta\in V$, $\alpha>0$ 에 대하여 식(17)의 가상변위를 $w=\tilde{u}+\alpha\zeta$ 로 정의하면 다음과 같다.

$$a(\tilde{u},\alpha\zeta)+j(\tilde{u}+\alpha\zeta)-j(\tilde{u})-f(\alpha\zeta)\geq 0 \tag{17}$$

위의 식(17)은 또한 $-\zeta$ 에 대하여도 성립하여야 하므로, 양변을 α 로 나누고 $\alpha\rightarrow 0^{+}$ 으로 극한을 시키면 다음의 식(18)과 같은 등식 관계가 성립한다.

$$a(\tilde{u},\zeta)+\int_{\Gamma_C}s\frac{d\phi}{d\tilde{u}}\zeta d\Gamma=f(\zeta) \tag{18}$$

이때, 식(15)의 미분은 다음과 같이 쓸 수 있고 Fig.2(b)과 같음을 알 수 있다.

$$\frac{d\phi(w_T)}{dw_T}=\begin{cases}\dfrac{w_T}{|w_T|},\ if\ |w_T|>\varepsilon \\ \dfrac{w_T}{\varepsilon},\ if\ |w_T|\le\varepsilon\end{cases} \tag{19}$$

Fig.2(b)에서도 확인할 수 있듯이 ε 이 작을수록 Coulomb의 마찰 모형에 접근함을 알 수 있다. 또한 다음의 부등식이 성립한다[3].

$$\langle\sigma_T, w_T-u_T\rangle + j(w_T) - j(u) \ge 0 \tag{20}$$

여기서 $\langle\bullet,\bullet\rangle$ 는 $H^{-1/2}\times H^{1/2}$ 에서 정의되는 관계(duality pairing)이고, 식(19,20)로부터 다음과 같은 관계가 성립함을 알 수 있다.

$$\sigma_T=\begin{cases}-s\dfrac{w_T}{|w_T|},\ if\ |w_T|>\varepsilon \\ -s\dfrac{w_T}{\varepsilon},\ if\ |w_T|\le\varepsilon\end{cases} \tag{21}$$

따라서 항상 $|\sigma_T|\le s$ 인 관계를 만족하므로 Coulomb마찰에 대한 근사화는 적절하게 되었음을 알 수 있다.

일반적으로 식(18)의 엄밀 해는 얻을 수 없으며 유한요소법을 이용하여 근사적인 해를 구한다. 여기서 좌변의 첫 항은 일반적인 탄성구조물의 강성행렬로 대체할 수 있고, 두번째 항은 마찰에 기인하는 강성으로 대체할 수 있으며 (19)식을 고려하면 특정 요소에 대해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[K]^C=\int_{\Gamma_C}[\Phi]^T k_c\left([I]-\{n\}\{n\}^T\right)[\Phi]d\Gamma \tag{22}$$

여기서 $[\Phi]$는 형상함수(shape function)이며, $[I]$는 단위행렬, $\{n\}$은 면에 수직한 단위 벡터를 뜻한다. 또 k_c 는 $|u_T|\le\varepsilon$ 인 경우 $s/|u_T|$ 이며, $|u_T|>\varepsilon$ 이면 s/ε 으로, 식(22)는 마찰의 상태에 따라 고착(stick)과 미끄러짐(slip)을 나타낸다[2]. 유한요소에 의한 해는 마찰에 의한 항이 비선형이므로 한번에 해를 찾을 수 없으며 축차적인 방법으로 해를 구한다.

4. 응용예제; 접촉을 고려한 KSNP형 핵연료집합체 상단고정체 해석

지금까지 언급한 내용은 접촉이 예상되는 탄성물체의 접촉문제 정식화와 그를 통한 해를 구하는 방안에 대한 것이다. 기하학적 구조가 복잡한 3차원 형상의 구조물은 코딩의 어려움이 있으므로 상용 프로그램을 이용하여 해석함이 통상의 방법이다. 서론에서 언급하였듯이 본 연구에서도 상용 프로그램(ANSYS)을 이용하여 핵연료집합체의 상단고정체 일부를 모델 하여 접촉이 일어나는 현상을 모사하였다.

핵연료집합체 상단고정체는 여러 부품들로 구성되며, 지진이나 냉각재상실 사고를 대비하여 특정 외력이 주어진 경우에 대한 구조물의 건전성을 확인하기 위해 응

력해석을 수행한다. 상단고정체의 기둥(outer-guide-post)은 유로판(flow-plate)의 구멍에 끼워져 있으며 원자로 내부의 냉각수의 유동 혹은 지진등에 의한 외력을 받으면 상호작용을 하여 외력에 의한 직접적인 영향 이외에 접촉에 의한 응력을 유발한다. 기둥의 가장 취약한 목(undercut) 부위에 발생하는 응력은 핵연료집합체의 건전성을 판단하는 기준으로 쓰이므로 핵연료 제조사들은 자체적인 코드를 개발하여 응력을 평가하고 있으나 대부분 1차원 해석에 의존하고 있다[8].

지진사고의 경중에 따라 작용하는 하중의 크기와 방향은 달라지며 본 연구에서는 OBE(Operation Based Earthquake) 하중의 경우에 대한 응력 해석을 수행하였다. 구조물의 모델은 특정한 기둥 위치에서의 응력이 관심이 되므로 전체계가 아닌 일부분만을 대상으로 한 것이다. OBE 경우의 오른쪽 기둥에 대한 하중은 Fig.3과 같이 상부에서 작용하는 집중력과 하부에서 모멘트와 축방향의 힘이 작용한다[8]. 이와 같은 구조물은 Fig.4와 같이 유한요소 구조로 형상화할 수 있으며 접촉하는 부분의 유한요소해석을 위한 접촉요소를 도입하였다. 각 부품은 스테인레스 강으로 마찰계수는 0.31로 하였다.

최초의 구조물은 기둥과 유로판 사이에 간극이 존재한다. 반면에 변위 경계조건은 유로판에만 존재하므로 기둥의 강체운동을 구속 시켜야 해가 발산하지 않는다. 즉 정적인 문제에서 강체운동이 접촉에 의한 구속만이 있는 경우이므로 최초의 기하하적 모델에 간극이 존재할 때에는 강체운동을 제한하는 조건이 필요하다. 여기서 다루는 구조물의 최초 모델 또한 간극은 존재하므로, 오로지 접촉에 의한 구속조건만을 부가하였다.

기둥과 유로판의 응력분포는 Fig.5와 같이 목 부분 부위에 응력이 집중적으로 발생하고 있음을 알 수 있다. 특히 유로판과 기둥간의 접촉이 발생한 부분의 접촉응력, 마찰력의 분포는 Fig.6,7과 같이 0도와 180도를 중심으로 점점 작아지는 방향으로 분포하고 있음을 알 수 있다. 이것은 굽힘에 의해 기둥이 변형되어 유로판과 접촉하면서 접촉압력의 분포가 상부에서는 오른쪽 하부에서는 왼쪽을 중심으로 접촉압력이 형성 됨을 의미한다. 또한 접촉압력과 마찰력의 관계는 0.31배 만큼 차이가 나므로 접촉한 상태를 계속 유지하고 있음을 알 수 있다. 또한 Fig.8과 같이 매 반복계산 단계에서의 응력분포 역시 접촉한 상태에서 변형이 일어났음을 보이고 있다.

5.결론 및 토의

일반적으로 여러 부품으로 이루어진 기계구조물에서, 부품상호간의 운동을 통해 에너지를 교환하며 접촉 메커니즘에 의한 상호작용은 대표적인 예이다. 부품간의 접촉은 응력의 집중 뿐 아니라 마모나 피로에 직접적으로 관련이 되므로 접촉에 의한 부품간의 작용을 해석하는 일은 매우 중요하다.

접촉에 의한 구조물의 관계는 부등식의 구조로 정식화 할 수 있으며 이것은 마찰함수의 불연속으로부터 기인하는 결과이다. 본 연구에서는 이러한 접촉 메커니즘을

설명하기위해 가상일을 도입하여 변분에 의한 부등식이 성립됨을 정리하였으며, 마찰에 의한 불연속과정을 근사화를 통해 미분가능 하도록 하여 통상의 유한요소해석이 가능함을 고찰하였다.

마찰을 동반한 접촉은 대표적인 비선형 문제로 반복적인 유한요소 해법으로 근사해를 얻을 수 있다. 본 연구에서는 핵연료집합체 상단고정체 부품을 대상으로 하여 근사화된 유한요소 해를 찾을 수 있었다. 상단고정체의 기둥과 유로판은 그 기하학적인 구조상 강체운동이 존재하며, 이 강체운동은 오로지 접촉에 의해 구속되므로 해가 수렴하는데 많은 반복이 필요하다. 고려한 대상물의 해석결과 목 부위에서 큰 응력이 걸리므로 이 부위에 대한 보강 설계가 필요한 것으로 판단되며 압력분포 및 마찰력의 분포는 미리 가정한 Coulomb의 모델을 충실히 따르고 있음을 관찰 할 수 있다.

후기

이 연구는 과학기술부의 지원으로 수행되었으며, 저자들은 관계자 여러분께 감사드립니다.

References

[1]K. L. Johnson, “Contact Mechanics”, Cambridge Univ. Press, 1985

[2]N. Kikuchi, J. T. Oden, “Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods”, SIAM, 1988

[3]G. Duvaut, J. L. Lions, “Inequalities in Mechanics and Physics”, Springer-Verlag, 1976

[4]T. J. R. Hughes, R. L. Taylor, J. L. Sackman, A. Curnier, W. Kanoknukulchai, “A Finite Element Method for a Class of Contact-Impact Problems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.8, pp.249-276, 1976

[5]J. K. Lee, K. Kamemura, “Adaptive Contact Element for Three-Dimensional Explicit Transient Analysis”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.72, pp.125-151, 1989

[6]J. C. Simo, P. Wriggers, R. L. Taylor, “A Perturbed Lagrangian Formulation for the Finite Element Solution of Contact Problems”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.50, pp.163-180, 1985

[7]J. A. C. Martins, J. T. Oden, “A Numerical Analysis of Class of Problems in Elastodynamics with Friction”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.40, pp.327-360, 1983

[8]N. G. Park, “Evaluation of RUMCOM Applicability for PLUS-7 FA”, technical report, KNF-TR-FA1-02010, KNFC

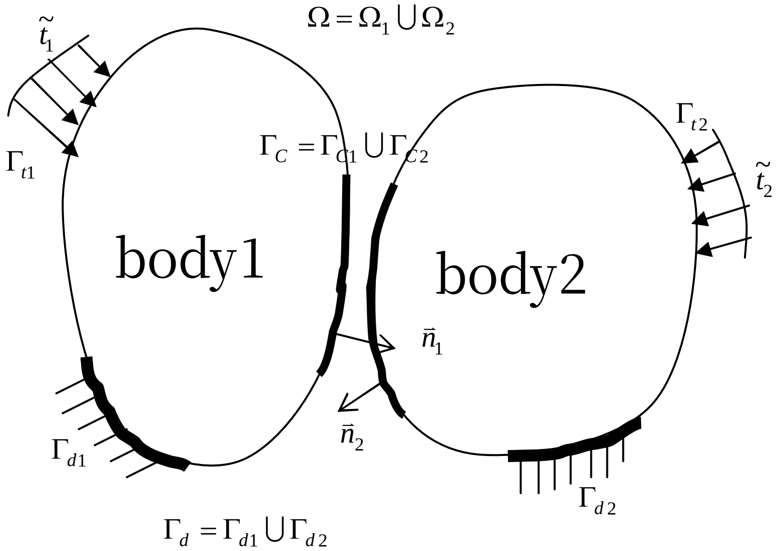
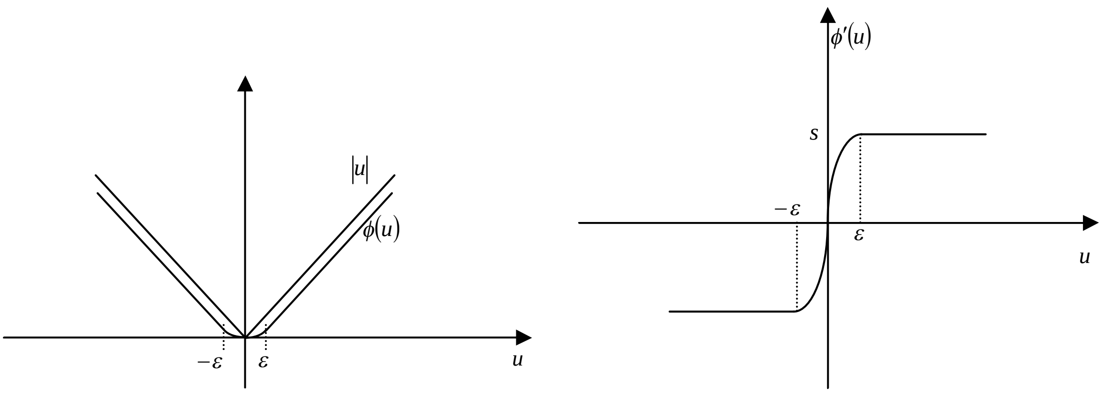


Fig.1 Elastic bodies with contact boundary.



(a) approximation of $|u|$

(b) regularized Coulomb friction model

Fig.2 Coulomb friction model and its regularization.

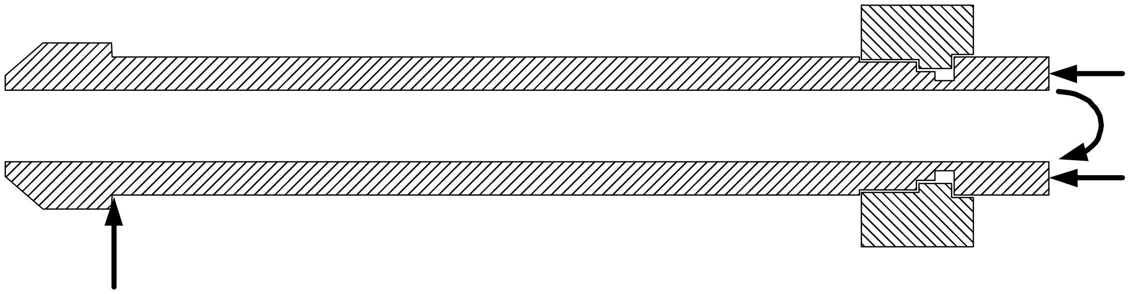
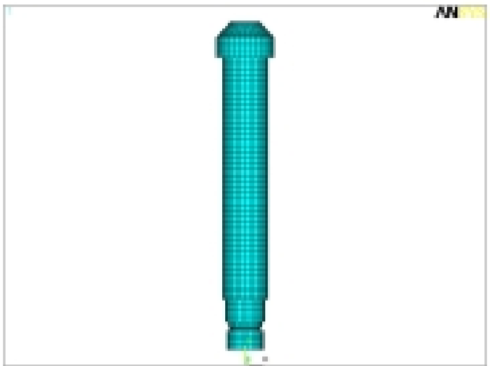
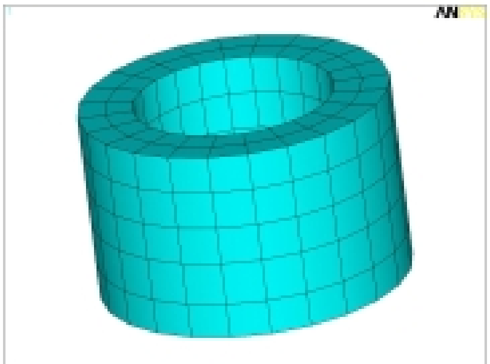


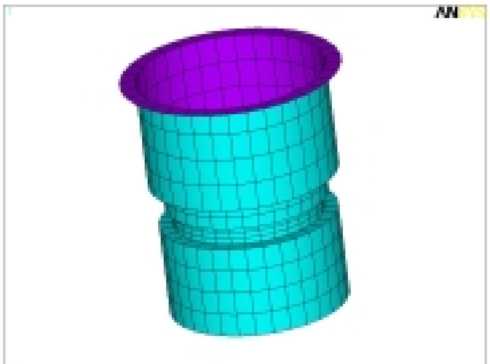
Fig.3 KSNP type Outer-Guide-Post and Flow-Plate model with applied external loads.



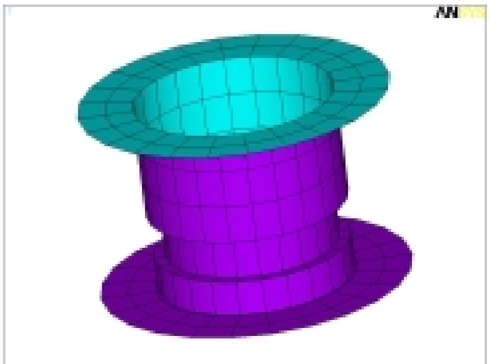
(a) Outer-Guide-Post



(b) Flow-Plate

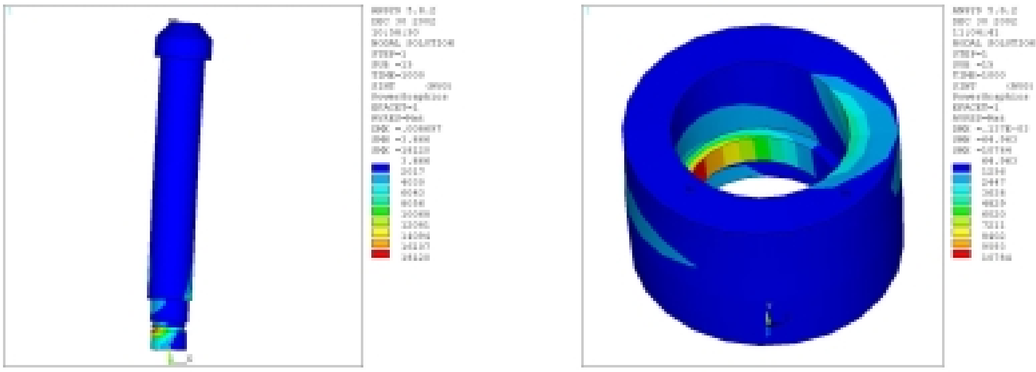


(c) Contact element



(d) Target element

Fig.4 KSNP 3D model for ANSYS



(a) Outer-Guide-Post stress intensity (b) Flow-Plate stress intensity

Fig.5 Stress Intensity distribution of Upper-End-Fitting .

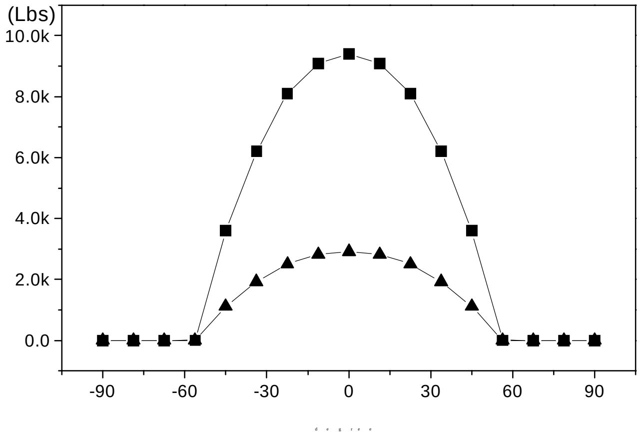


Fig.6 Contact pressure(—■—) and frictional stress(—▲—) of upper contact portion.

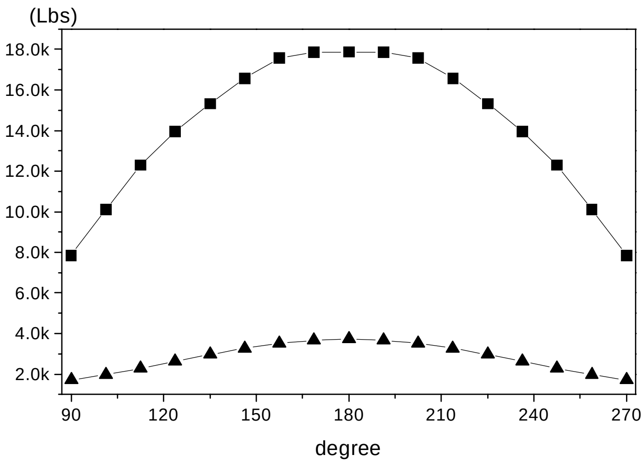


Fig.7 Contact pressure(■) and frictional stress(▲) of lower contact portion.

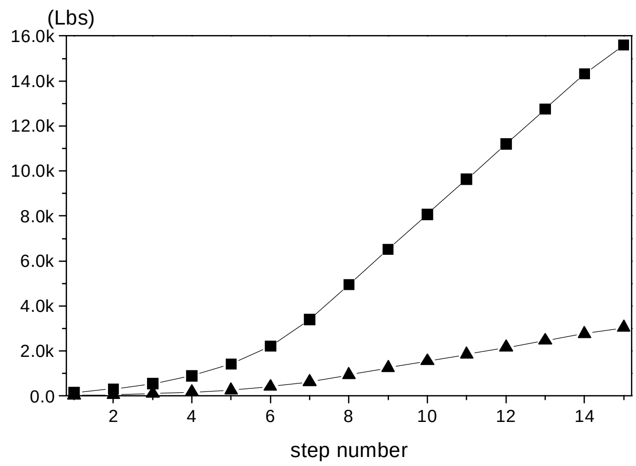


Fig.8 Contact pressure(■) and frictional stress(▲) in the azimuth of 135^{o} with respect to iteration.