2003 춘계학술발표회 논문집
한국원자력학회

마찰이 없는 강체 및 탄성 접촉조건을 갖는 1자유도계의 강제진동해석

Forced Vibration Analysis of 1-DOF System Constrained to Rigid and Elastic wall Contact Condition without Friction

박 남규, 이 성기, 정 규창, 서 정민, 김 형구, 이 준노, 김 규태
한전원자력연료㈜
대전시 유성구 덕진동 493

요 약

대부분의 기계부품과 마찬가지로 원자로 내에서도 지진이나 기타의 외력에 의하여 부품간의 접촉이 발생하며 접촉력은 마모율에 영향을 끼친다. 따라서 이러한 접촉현상에 대한 이해를 돕고자 본 연구에서는 강체 및 탄성 접촉조건을 수반하는 1자유도 계의 강제 진동을 다루었다. 접촉을 수반하는 계는 부등식 조건을 만족시키는 해를 찾아야 한다. 본 연구에서는 접촉조건을 벌칙함수로 부가하여 미분 가능한 계로 전환 시킨 후 신뢰도 있는 수치 근사해를 구할 수 있었고 비선형 거동을 관측할 수 있었으며 이러한 결과들로부터 접촉현상에 대한 이해를 도모할 수 있었다.

Abstract

Contacts, caused by earthquake or other unknown external forces, between reactor internals can be seen as it does in another type of mechanical components and definitely wear rate is dependent on contact force. Forced vibration of 1 degree of freedom system, which is constrained to contact condition without friction, is analyzed using penalty function method. Unlike ordinary case without contact, the solution of the system with contact condition should satisfy inequality condition. Inequality equation due to contact can be transformed to equality equation considering convex penalty function. The work finds the confident solution using a proposed penalty function and it is believed that this work helps to understand contact problem existed in reactor.

1.서론

다양한 하중 조건에 노출된 원자력 발전 계통은 여러 부속품 간의 접촉 현상이 발생할 수 있다. 특히 원자로 내의 냉각수의 흐름 혹은 지진 등에 기인하여 집합체와 집합체 간의 접촉이 일어나며 집합체를 구성하는 각 부품간에도 접촉이 일어나므로, 원자로 설계 혹은 집합체 설계 단계에서 접촉에 의한 구조적인 안전성 여부를 검사할 필요성이 있다. 또한 연료봉과 지지격자 스프링사이에 간극이 생길 경우 접촉력의 변화에 따라 마모량이 증대될 수 있으므로 접촉력에 대한 분석이 뒤따라야 할 것이다. 접촉현상은 대부분의 공학분야에서 쉽게 찾아볼 수 있는 대표적인 비 선형문제로 알려져 있으며 이와 관련된 분야에서 많은 연구가 수행되었다. 대부분의 접촉문제는 또한 마찰이 수반되며 복잡한 마찰 기구(mechanism)는 수학적 모형을 수립하는데 장애가 된다[1].

유체 유발에 의한 영향을 파악하기 위해 Paidoussis[2]는 가느다란 봉의 중심에 간극을 설정하여 일정 간극 내에서만 움직임을 제한하였고, 간극에 의한 영향을 비선형 스프링(cubic spring, trilinear spring)으로 묘사하여 여러 비 선형 현상에 대해 서술하였다. 경계조건의 변화는 접촉 문제를 해석하는데 또 하나의 어려운 요소이며[3], 유체에 의한 봉 끝단의 경계조건의 변화를 2가지 모델을 사용하여 비 선형 거동을 해석한 예도 있다[4].

일반적으로 탄성 구조물간의 접촉은 주어진 간극의 거리가 점점 좁혀져서 접촉부분의 응력이 압축응력으로 작용한다. 이때는 탄성접촉이 일어나는 것으로 볼 수 있고 이러한 계를 묘사하기 위해 본 연구에서는 접촉점에 선형스프링이 존재하는 경우에 대하여 해석하였다. 이때 제한된 간극 내에서만 움직이는 경우는 접촉조건의 탄성 스프링 계수가 무한대인 것으로 생각할 수 있으며 강체 경계조건이 된다.

본 연구는 이와 같은 접촉 현상의 이해를 도모하기 위해 접촉이 일어나는 1자유도 계의 동적거동을 관찰하였다. 제한된 간극 내에서만 움직이는 경우는 변위에 대한 부등식 제약조건이 수반되는 비선형 최적화 문제로 정의할 수 있고, 라그랑지 승수 또는 벌칙함수(penalty function)를 도입함으로써 수치 근사해를 얻을 수 있다[5]. 본 연구에서는 벌칙함수에 의한 신뢰도 있는 수치 근사해를 구하였고 탄성접촉 시 발생하는 접촉력의 분포를 고찰하여 접촉을 동반한 계에 대한 이해를 도모할 수 있었다.

2.고정된 간극의 제약조건을 갖는 계

어느 계의 거동이 강체로 둘러 쌓인 공간에서만 가능한 경우, 이러한 계는 고정된 간극을 제한조건으로 하는 모델로 설명할 수 있다. 특별히 여기서 다루는 1자유도계는 Fig.1과 같이 설명할 수 있다. Fig.1(a)는 양쪽의 간극사이에서만 움직임이 가능하며 (b)의 경우는 한쪽의 간극이 없어질 경우 선형 스프링과 상호작용하는 경우를 의미한다. 일반적으로 이런 계의 해를 구하는 방법은 전체계의 에너지를 최소화

하는 최적화 과정으로 생각할 수 있다. 즉

$$\begin{aligned}&\textit{Find } u \textit{ such that}\\ &\quad F(u)=\inf_{v\in K} F(v)\\ &K \textit{ be a nonempty closed convex set}\\ &F:K\to R \textit{ be a functional defiend on } K\end{aligned}\tag{1}$$

또한 위의 식(1)은 다음 부등식의 해를 찾는 것과 등가이다.

$$\begin{aligned}&\langle \rho\ddot{u}, v-\dot{u}\rangle + a(u, v-\dot{u}) \geq (f, v-\dot{u})\\ &u(0)=u_0,\ \dot{u}(0)=u_1\\ &g_l \leq u \leq g_u\\ &V=\{v\in H^1 \,|\, \gamma(v)=0 \ a.e.\ on\ \Gamma_D\}\end{aligned}\tag{2}$$

여기서 $\langle \bullet,\bullet \rangle$는 $V'\times V$ 에서 정의되는 연산자(operator)이며, V' 은 쌍대공간(dual space)을 의미하고 나머지 기호에 대한 정의는 참고문헌[3]와 동일하다. 이때 식(2)의 부등식 문제를 풀기위해서 벌칙함수 P를 도입할 수 있으며 식(1)과 동일한 형식으로 수식화 할 수 있다. 이것은 다음 식(4)와 같고,

$$\begin{aligned}&\textit{Find } u \textit{ such that}\\ &\quad F_\varepsilon(u_\varepsilon)=\inf_{v\in K}\left[F(v)+\frac{1}{\varepsilon}P(u_\varepsilon)\right]\\ &K \textit{ be a nonempty closed convex set}\\ &F:K\to R \textit{ be a functional defiend on } K\end{aligned}\tag{4}$$

여기서 벌칙함수 P는 공간 V에 존재하는 구성원을 실수 공간 R에 사상시키는 함수 ($P:V\to R$)이며, 볼록함수(convex function) 조건을 만족시키는 다음과 같은 성질이 있다.

$$\begin{cases}P(v)=0, & iff\ \ v\in K\\ else & P(v)\geq 0\end{cases}\tag{5}$$

따라서 Fig.1(a)와 같은 계에서 에너지 함수와 부등식 제한 조건을 고려하여 $\varepsilon>0$ 조건의 벌칙함수를 도입한 (6)과 같이 쓸 수 있다.

$$F_\varepsilon(v)=\int_0^t \frac{1}{2}kv^2dt-\int_0^t\frac{1}{2}m\dot{v}^2dt-\int_0^t(fv-c\dot{v}v)dt+\frac{1}{\varepsilon}P(v)\tag{6}$$

변위와 속도의 초기조건이 모두 0이라고 가정하고 식(6)을 변분하면 벌칙함수를 수반하는 지배방정식 (7)을 찾을 수 있다.

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku+\frac{1}{\varepsilon}\phi(u)\frac{\partial\phi}{\partial u}=f\tag{7}$$

여기서 ϕ 는 벌칙함수 P 를 $\frac{1}{2}\phi^2$ 로 가정하여 나온 결과이다.

3.벌칙함수와 접촉력

위에서 도입한 벌칙함수는 식(5)의 조건을 만족 시켜야 하며 Fig.1을 참조로 하면 다음의 관계가 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{cases} u \le g_u \\ u \ge g_l \end{cases} \qquad (8)$$

따라서 위의 식(8)은 다음의 식(9)와 같이 하나의 식으로 표현할 수 있다.

$$(u - g_u)(u - g_l) \le 0 \qquad (9)$$

만일 $\phi(u) = (u - g_u)(u - g_l)$로 하면 벌칙함수는 다음과 같다.

$$P(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\phi^2, \; if \; \phi > 0 \\ 0, \; if \; \phi \le 0 \end{cases} \qquad (10)$$

그러므로 위에서 정의한 벌칙함수는 볼록함수이며 (5)식의 조건을 만족함을 알 수 있다. 그런데 식(7)의 좌변 마지막 항은 식(9)로부터 최고차 항이 3차임을 알 수 있고 이는 Paidoussis[1]가 가정한 모델의 비선형 스프링과 동차이다.

만일 한단만이 고정된 간극의 제약조건을 갖고 다른 쪽은 탄성 스프링과 연결이 되어있는 Fig.1(b)와 같은 경우 벌칙함수는 다음과 같이 변화된다.

$$P(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\phi^2, \; if \; \phi > 0 \; and \; u < g_l \\ 0, \; if \; \phi \le 0 \\ k_a, \; if \; \phi > 0 \; and \; u > g_u \end{cases} \qquad (11)$$

즉 위의 식에서 특정한 간극 내에서는 식(10)과 같은 성질의 운동을 하는 것을 알 수 있으며 만일 간극 g_u를 초과하는 운동이 발생하면 탄성 스프링과의 접촉이 발생하는 것임을 알 수 있다. 따라서 접촉시의 전체계의 탄성계수는 접촉면의 스프링계수 k_a의 효과가 반영되어 $k + k_a$가 됨을 알 수 있다.

또한 탄성접촉이 발생하면 접촉력은 압축방향으로 작용하고 여기서 다루는 문제에 적용되는 압축력은 다음 식(12)와 같다.

$$f_c = -k_a(u - g_u), \; u \ge g_u \qquad (12)$$

4.수치해석예제

Fig.1과 같은 계에 대하여 수치해석한 결과이며 단위질량과 댐핑계수 0.2Ns/m, 스프링계수 100N/m인 경우를 고려하였다. 그리고 간극은 $g_u = 5mm$, $g_l = -5mm$를 대상으로 하였고 마찰은 없는 것으로 가정하였다. 또한 간극 g_u를 통과하여 선형스프링이 존재하는 Fig.1(b)의 경우 접촉면의 탄성계수는 원래의 시스템과 동일하게 100N/m로 가정하였다. 또한 초기 속도와 변위조건은 모두 0인 것으로 가정하였다.

만일 접촉 요소가 없는 선형 시스템에 특정한 입력이 주어지면 계의 특성과 주어진 입력의 효과가 계에 반영되어 나타난다. 여기서는 2가지 입력의 영향을 고려하였고 5Hz 주기를 갖는 사인파(sine wave)로 가진하는 경우와 충격함수가 가해지는

경우에 대한 결과를 Fig.2,3과 같이 얻을 수 있다. 예상한 바와 같은 선형 시스템의 응답을 얻을 수 있으며 Fig.2의 경우 속도와 변위간의 위상차로 인해 충격함수의 경우와 달리 위상 곡선이 어그러져 나타나고 있다.

1) 양단에서 강체 접촉을 하는 경우

이 경우는 Fig.1(a)에 대한 수치 해석 결과이다. Fig.4의 결과는 벌칙함수의 크기를 정하는 ε 이 10^{-12} 인 경우에 대한 변위, 속도곡선이다. 변위는 주어진 제한조건인 $-5mm \le u \le 5mm$ 내에서만 움직이고 있음을 알 수 있다. 또한 속도곡선은 접촉이 이루어지는 순간 기울기가 거의 수직으로 향하고 있다. 이것은 강체면에 접촉하여 진행방향이 급작스럽게 변하기 때문이다. Fig.4(c)는 속도와 변위의 그림으로 주어진 변위 제한조건에서 속도가 갑자기 변하는 것을 보여준다. 또한 이 결과는 선형시스템의 결과와는 매우 다른 양상으로 비선형시스템의 전형적인 특성을 보여주고 있다.

여기서 구한 결과는 ε 의 값에 따라 그 결과에 큰 차이가 있다. 즉 Fig.5에 보인 바와 같이 10^{-6} 으로 구한 계산결과는 거의 선형시스템의 변위곡선과 유사함을 알 수 있으며 이것은 벌칙함수가 제대로 역할을 수행하고 있지 않음을 의미한다. 또한 Fig.6에서 보듯이 제안한 방법과 상용프로그램(ANSYS)의 결과를 비교해 보면 거의 유사한 변위와 속도곡선의 파형을 볼 수 있다.

충격함수에 대한 응답은 Fig.7에서 볼 수 있다. 변위곡선에서 시간이 지날수록 충격의 주기가 점점 느려지고 있으며 속도곡선에서 속도의 크기가 점점 감소하고 있음을 알 수 있다. 주어진 간극은 간극이 없는 계의 진동 폭보다 작으므로 충격함수에 대한 응답은 Fig.3의 선형시스템의 파형에서 유추할 수 있다.

(2)다른 한쪽이 탄성스프링과 접촉하는 경우

이 경우는 Fig.2(b)에 해당하며 접촉하는 면이 탄성인 경우이다. 대부분의 접촉면은 탄성으로 작용하므로 Fig.1(a)보다 실제적인 예로 볼 수 있다. 이때의 벌칙함수 조건은 식(11)과 같이 주어진다. 따라서 변위 u가 g_u 를 통과하면 탄성스프링과 접촉하고 계의 응답은 접촉면의 탄성이 더해진 계에 대한 응답으로 바뀐다.

Fig.8은 이 계에 대한 상태 변수들의 곡선이다. (c)의 그림에서 g_u 를 통과하는 순간 속도가 불연속적으로 바뀌는 현상을 볼 수 있다. 이것은 선형스프링과 접촉하는 순간 속도에 대한 저항이 발생하여 불연속이 발생한 것으로 평가할 수 있다. 반면 다시 g_u 를 통과하여 원점으로 돌아가는 순간은 불연속이 발생하지 않고 있음을 알 수 있다. 탄성체와 접촉이 발생하는 순간 접촉력은 식(12)에 따라 힘이 결정되며 Fig.9에 접촉력의 시간에 대한 분포를 도시하였다.

5.결론 및 고찰

여러 기계부품과 마찬가지로 원자로 내에서도 지진이나 기타의 외력에 의하여 부품간의 접촉이 발생한다. 따라서 이러한 접촉현상에 대한 이해를 돕고자 본 연구에서는 접촉조건을 수반하는 1자유도 계의 거동을 다루었다. 접촉을 수반하는 계는

부등식 조건을 만족시키는 해를 찾아야 한다. 본 연구에서는 접촉조건을 벌칙함수로 사용하여 미분 가능한 계로 전환 시킨 후 수치 근사해를 구할 수 있었다.

본 연구에서는 접촉조건으로 마찰이 없는 강체벽면을 가정하였고 강체벽면과 접촉이 발생하는 순간 변위와 속도에 불연속이 발생하는 현상을 고찰 할 수 있었다. 또한 벌칙함수의 크기를 결정하는 값(ε)에 따라 해가 달라지는 결과를 얻을 수 있고 상용프로그램의 결과와 제안된 방법의 결과가 거의 일치하는 것을 관찰 할 수 있었다. 여기서 다룬 예제의 경우 ε의 값을 10^{-12} 이하의 값으로 하여 상용 프로그램과 유사한 결과를 얻었다. 또한 한쪽에서 선형스프링으로 접촉하는 경우 접촉하는 순간 저항이 발생하여 속도의 불연속이 발생함을 알 수 있다. 이러한 현상은 간극이 존재하는 연료봉과 스프링의 접촉 시에도 발생할 수 있으며 스프링과의 간극, 외력의 크기 등에 따라 연료봉에 전달되는 접촉력이 달라짐을 유추할 수 있다.

이상의 수치예제를 통하여 접촉면이 존재하는 계에 대한 거동을 관찰 할 수 있었으며 비선형적인 특성에 관한 정보를 얻을 수 있었다. 여기서 다루는 내용은 1자유도에 대한 내용이나 다자유도계에 대해서도 역시 같은 알고리즘이 적용될 수 있으므로 접촉을 동반하는 일반적인 구조물의 비선형 거동에 대한 이해를 도모할 수 있다.

후기

이 연구는 과학기술부의 지원으로 수행되었으며, 저자들은 관계자 여러분께 감사드립니다.

References

[1] J.T. Oden, J.A.C. Martins, “Models and Computational Methods for Dynamic Friction Phenomena”, Computer Method in Applied Mech. & Eng., 1985, Vol.52, pp527-634

[2]M.P. Paidoussis, G.X. Lee, “Cross-Flow-Induced Chaotic Motions of Heat-Exchanger Tubes Impacting on Loose Support”, PVP-Vol.206, Flow-Induced Vibration and Wear, 1991, pp.31-41

[3]N.G. Park, etc., “마찰을 동반한 탄성 구조물의 접촉 역학 및 응용”, 2003 한국 원자력학회 춘계학술대회

[4]Y. Cai, S.S. Chen, “A Theory for Fluidelastic Instability of Tube-Support-Plate-Inactive Modes”, PVP-Vol.206, Flow-Induced Vibration and Wear, 1991, pp.9-18

[5]J.T. Oden, N. Kikuchi, “Finite Element Methods for Constrained Problems in Elasticity”, Int. J. Numerical Methods in Eng., 1982, Vol.18, pp.701-725

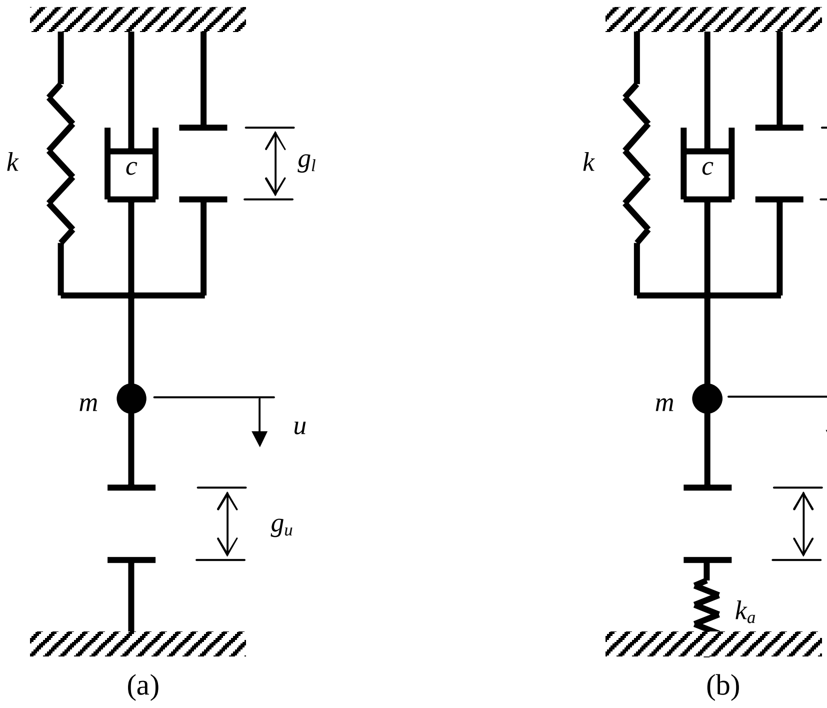
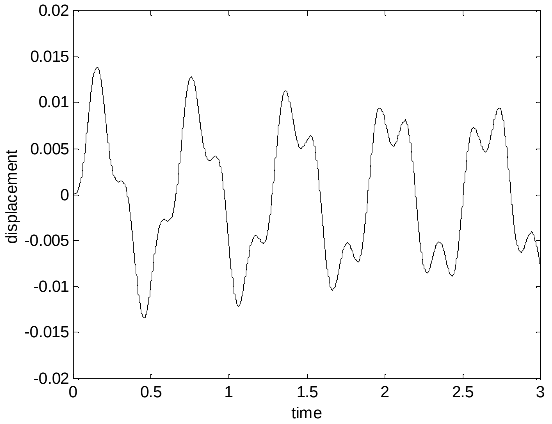
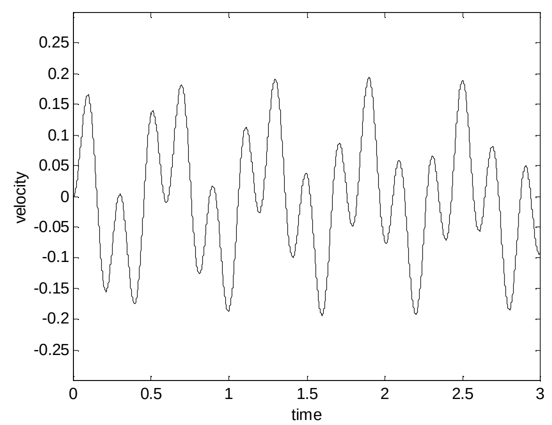


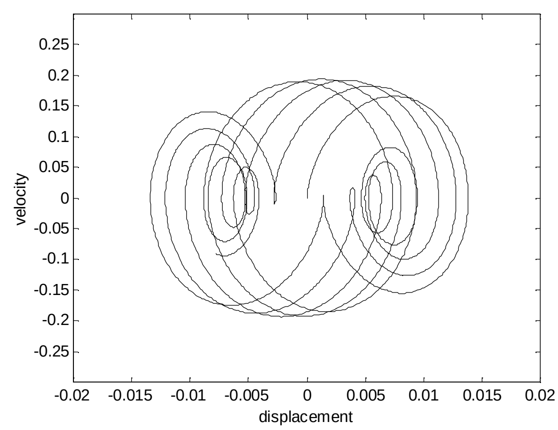
Fig.1 One-dof system of interest(m=1*kg*, c=0.*2Ns/m*, k=100*N/m*), (a) case 1 has two rigid wall contact condition (b) case 2 has one rigid wall and one elastic contact condition($k_a = k$)



(a)

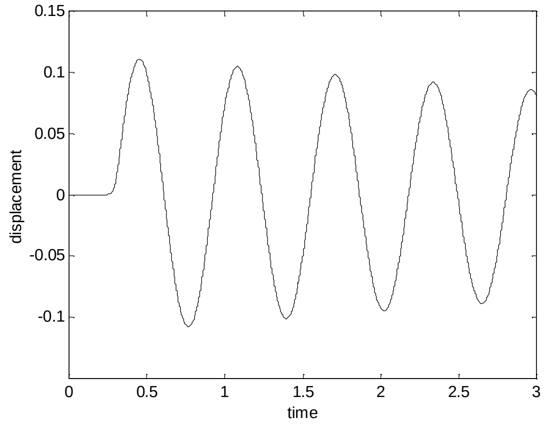


(b)

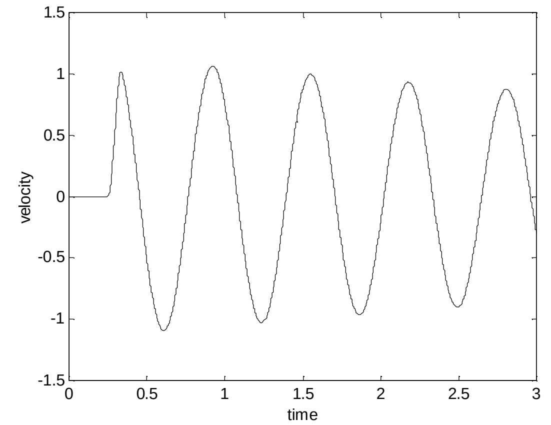


(c)

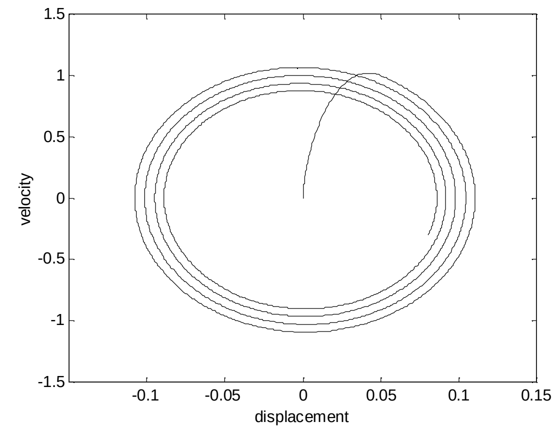
Fig.2 Linear system response to sine input $3\sin(10\pi t)$, (a) displacement(unit: *m*) (b) velocity(unit: *m/s*) (c) phase plot



(a)

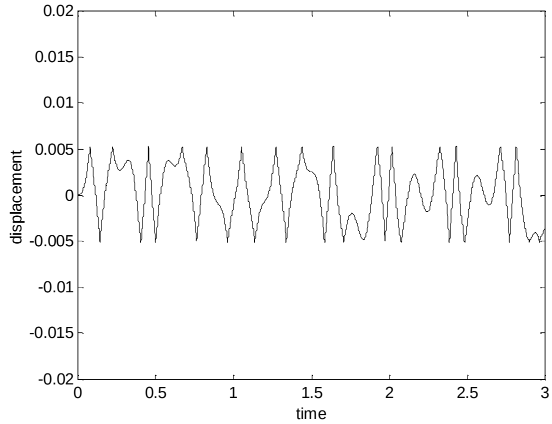


(b)

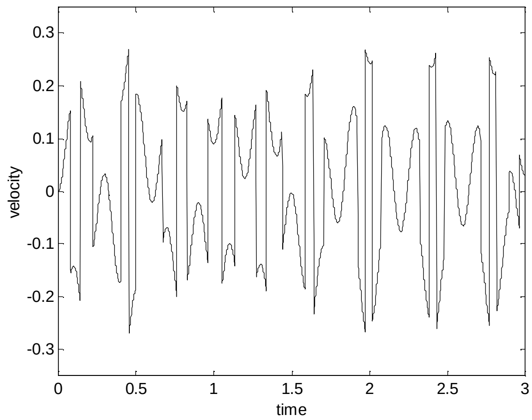


(c)

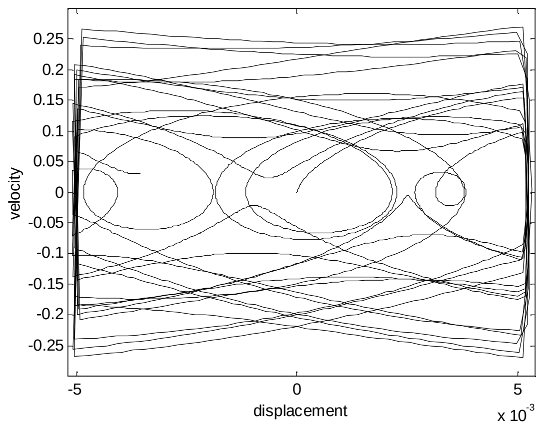
Fig.3 Linear system response to impulse input, (a) displacement(unit: *m*) (b) velocity(unit: *m/s*) (c) phase plot



(a)

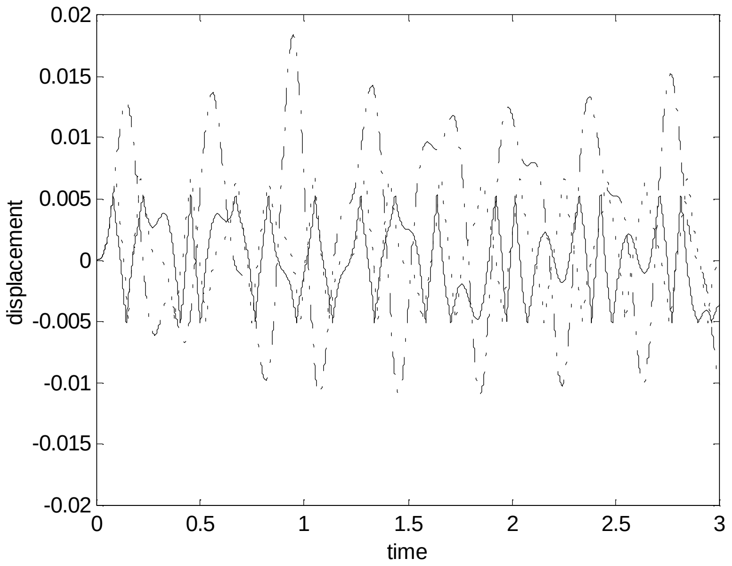


(b)

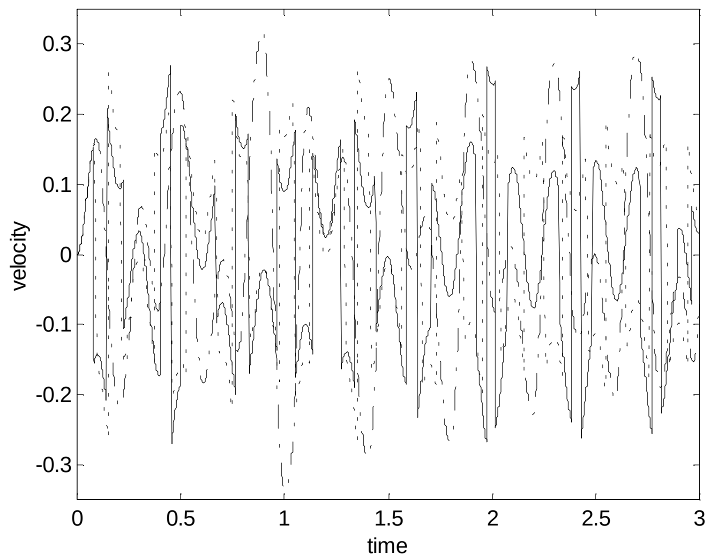


(c)

Fig.4 Response of nonlinear system with gap to sine wave($\varepsilon=10^{-12}$) (a) displacement(unit: *m*) (b) velocity(unit: *m/s*) (c) phase plot

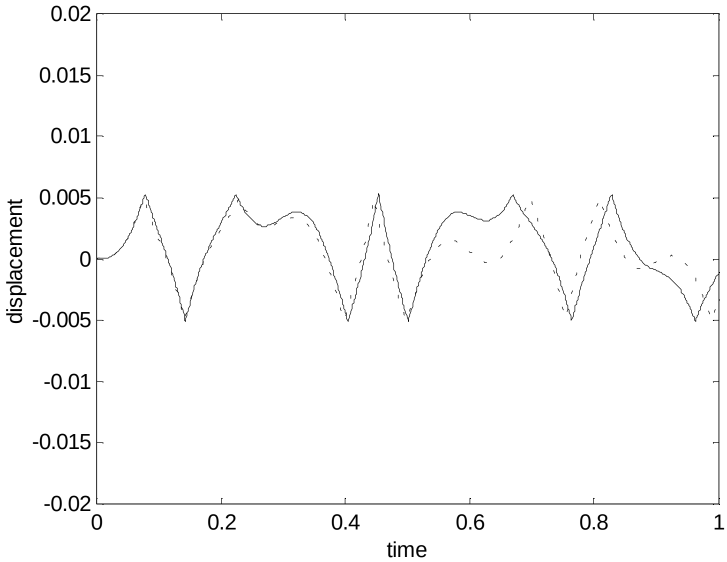


(a)

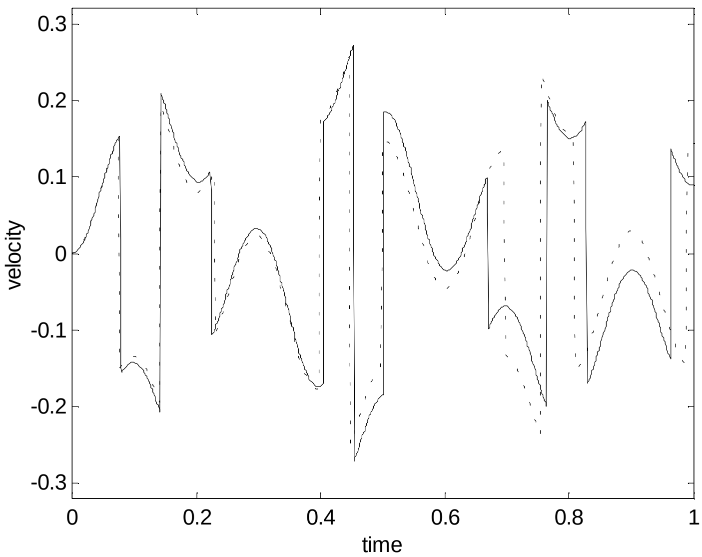


(b)

Fig.5 Nonlinear system response as a function of ε; —— (10^{-12}), ----- (10^{-9}), — - — (10^{-6}) (a)displacement(unit: *m*) (b)velocity(unit: *m/s*)

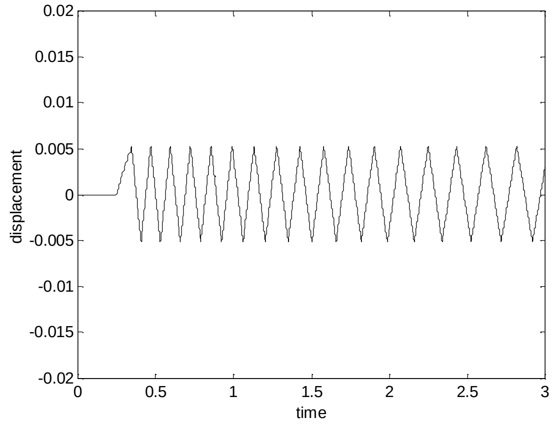


(a)

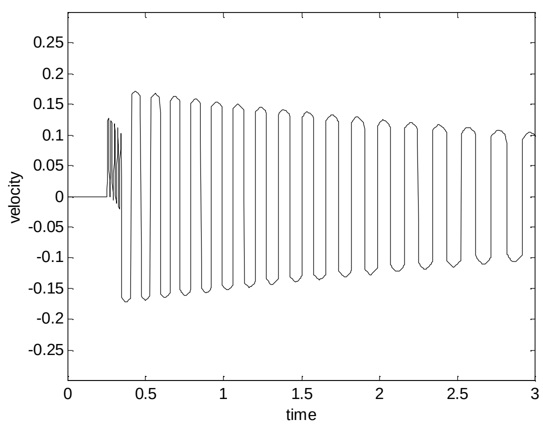


(b)

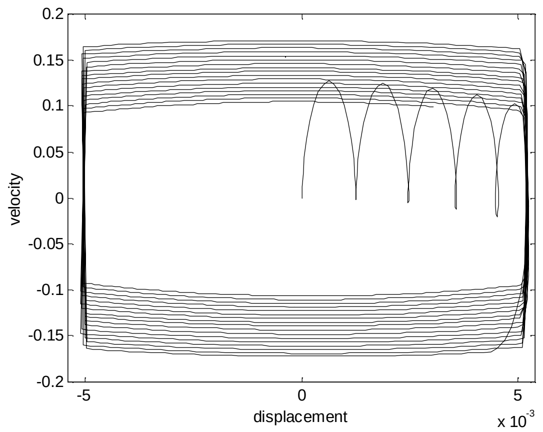
Fig.6 comparison of proposed results(—) and those of ANSYS(-----), (a)displacement (unit: *m*) (b)velocity(unit: *m/s*)



(a)

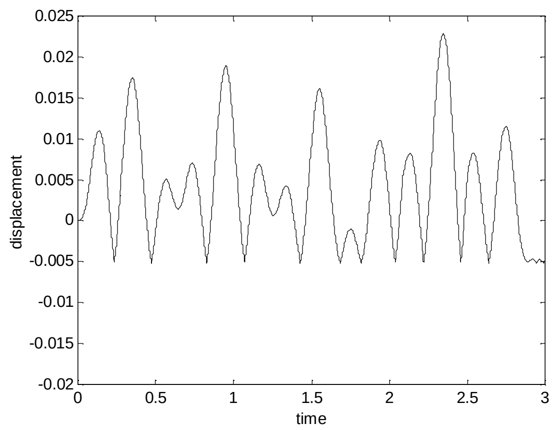


(b)

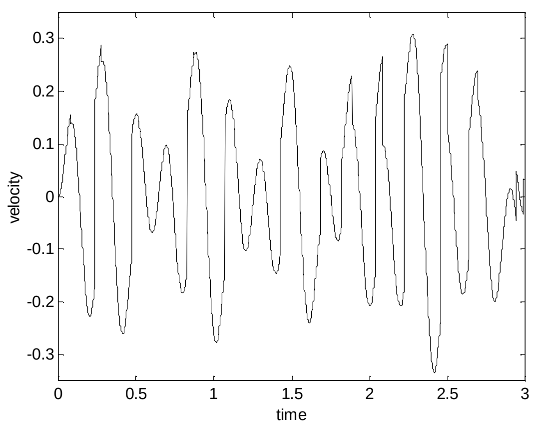


(c)

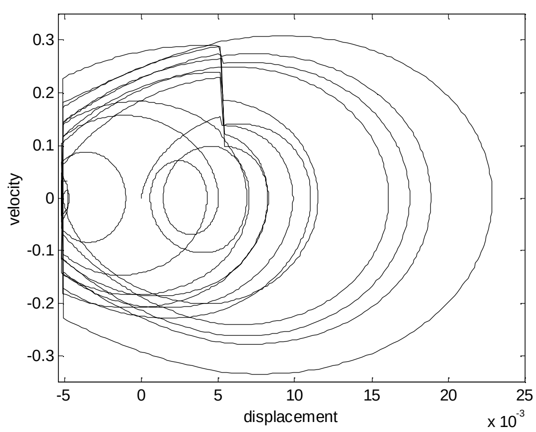
Fig.7 Impulse response of the nonlinear system($\varepsilon=10^{-12}$), (a)displacement(unit: *m*) (b)velocity(unit: *m/s*) (c) phase plot



(a)



(b)



(c)

Fig.8 Responses of the nonlinear system which have one elastic contact condition($\varepsilon=10^{-12}$), (a)displacement(unit: *m*) (b)velocity(unit: *m/s*) (c) phase plot

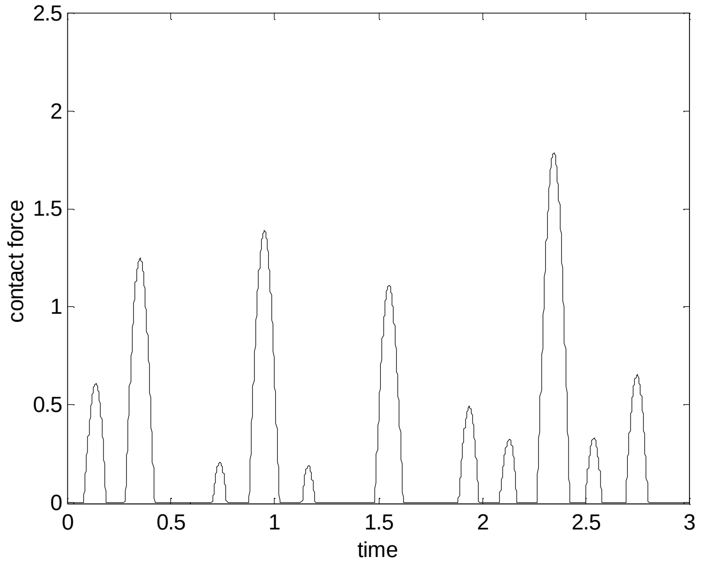


Fig.9 Contact force distribution resulted from elastic contact; note that contact force is compressive and its unit is N.